14. Dokazati da ako je P polinom i $k = \{z : |z-a| = R\}$ kružnica, tada je
$$\int_k P(z)\,\mathrm{d}\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(a),$$
pri čemu ako je $\gamma : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{C}$ glatka kriva k, onda $\int_k f(z)\mathrm{d}\overline{z} := \int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t))\overline{\phi'(t)}dt$.

15. Integraleći funkciju $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ duž konture pravougaonika $Q(-R, R, R+\alpha i, -R+\alpha i)$, i puštajući da $R \to \infty$, dokazati da je
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos 2\lambda a x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda a^2},$$
gdje su λ i a pozitivne konstante.

16. Dokazati da ako je funkcija f analitička i ograničena u konveksoj oblasti D, tada za bilo koje dvije tačke z_1 i z_2 iz oblasti D važi
$$|\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z| \le \max_{z\in D} |f(z)||z_2 - z_1|.$$

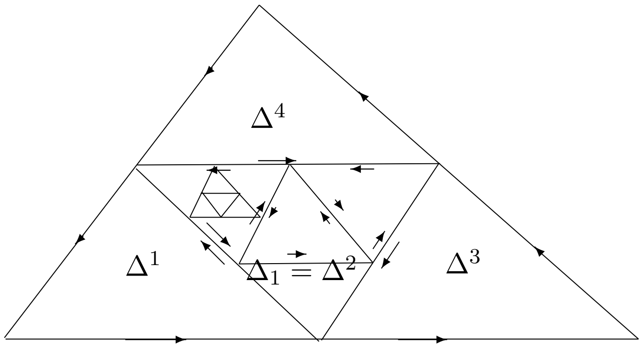
17. Dokazati da je $|\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{1}{z} dz| \le 4\pi$.

2 Cauchyeva teorema, Cauchyeva integralna formula i Cauchyev integral

U teoriji analitičkih funkcija centralno mjesto zauzima sljedeća teorema.

Teorema 2.1 (Cauchyeva teorema)**.** *Ako je $D \subseteq C$ prostopovezana oblast, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička funkcija u D i $\gamma \subseteq D$ zatvorena dio po dio glatka kriva, onda je $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Dokaz teoreme u slučaju kad je $\gamma = \Delta$ kontura trougla. U iskazu teoreme nije bitno kako je kriva γ orijentisana, jer se promjenom orijentacije mijenja samo znak integrala. Neka je $M = |\int_\Delta f(z)\,dz|$. Tri srednje linije dijele



Slika 3.1: Opadajući niz trouglova Δ_n, $n \in \mathbb{N}$.

trougao Δ (vidi sliku 3.1) na četiri nova trougla $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$. Pri tome je

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Delta^1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta^4} f(z)dz\right| \\
&\qquad \geq \left|\int_{\Delta^1} f(z)dz + \int_{\Delta^2} f(z)dz + \int_{\Delta^3} f(z)dz + \int_{\Delta^4} f(z)dz\right| \\
&\qquad = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = M.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je bar jedan od brojeva $|\int_{\Delta^i} f(z)\,dz|, i = 1, 2, 3, 4$, veći ili jednak od $\frac{M}{4}$. Taj trougao označimo sa Δ_1. Dakle,

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

Dalje, srednjim linijama trougao Δ_1 dijelimo na četiri trougla i biramo trougao Δ_2, za koji je

$$\left|\int_{\Delta_2} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Produžavanjem ovog postupka dobija se niz trouglova $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots$ takav da je

$$\left|\int_{\Delta_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4^k}.$$

Presjek svih ovih trouglova je tačka z_0.

Neka je $\varepsilon > 0$. Pošto je funkcija f diferencijabilna u tački z_0, postoji realan broj $\delta > 0$, takav da

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Pri tome, postoji prirodan broj n_0, takav da krug $k(z_0, \delta) := \{z : |z - z_0| < \delta\}$ sadrži sve truoglove $\Delta_i, i \geq n_0$. Uzimajući u obzir da je $\int_{\Delta_i} dz = \int_{\Delta_i} z\, dz = 0$, dobijamo da za indekse $i \geq n_0$ važi:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Delta_i} f(z)\, dz \right| &= \left| \int_{\Delta_i} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\, dz \right| \\
&\leq \varepsilon \left| \int_{\Delta_i} (z - z_0)\, dz \right| \\
&\leq \varepsilon \int_{\Delta_i} |z - z_0| ds \\
&\leq \varepsilon \cdot \int_{\Delta_i} l(\Delta_i) ds \\
&= \varepsilon \cdot (l(\Delta_i))^2,
\end{aligned}$$

gdje je $l(\Delta_i)$ obim trougla Δ_i. Pri tome je $l(\Delta_i) = \frac{l(\Delta)}{2^i}$, pa je za svako $i \geq n_0$

$$0 \leq M \leq \operatorname{diam}\Delta_i \cdot l(\Delta_i)\varepsilon,$$

odakle slijedi da je $M = 0$. □

Da bismo dokazali da je tvrdjenje tačno za svaku zatvorenu dio po dio glatku krivu γ , dokažimo prethodno jedan pomoćni rezultat.

Lema 2.2 (Goursat). *Ako je $D \subseteq C$ prostopovezana oblast, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička funkcija u D i $\gamma \subseteq D$ zatvorena dio po dio glatka kriva, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji poligon γ_P sa tjemenima na krivoj γ, orijentisan saglasno sa krivom γ, i takav da je $| \int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma_P} f(z)\, dz| < \varepsilon$.*

Dokaz. Neka je D_1 oblast ograničena konturom γ. Skup $\overline{D_1} := D_1 \cup \gamma$ je kompaktan (zatvoren i ograničen), pa je funkcija f ravnomjerno neprekidna na $\overline{D_1}$. Neka je $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2l}$, gdje je $l = l(\gamma)$ dužina krive γ. Tada postoji $\delta > 0$, takav da

$$|z' - z''| < \delta \Longrightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

Tačkama $z_0, z_1, \ldots, z_k$ podijelimo krivu γ na djelove $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, tako da dužina svakog od njih bude manja od δ. Sa γ_P označimo granicu poligona P čija su tjemena tačke $z_0, \ldots, z_k$. Pretpostavimo da je podjela takva da i poligon P leži u oblasti D. Tada je

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{i=0}^{k} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)\right| &= \left|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{i=0}^{k} f(z_i)\int_{\gamma_i} dz\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{k}\int_{\gamma_i} (f(z) - f(z_i))\,dz\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\left|\int_{\gamma_i} (f(z) - f(z_i))\,dz\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{k}\int_{\gamma_i} |f(z) - f(z_i)||dz| \\
&\le \varepsilon_1 \sum_{i=0}^{k} l(\gamma_i) = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dalje, važi i sljedeća nejednakost:

$$\left|\int_{\gamma_P} f(z)\,dz - \sum_{i=0}^{k} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odavde slijedi

$$\left|\int_{\gamma_P} f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Lema je dokazana.

Vratimo se dokazu teoreme. Za zadato $\varepsilon > 0$ i datu dio po dio glatku zatvorenu krivu γ konstruišimo poligon γ_P, koji leži u D, takav da je

$$\left|\int_{\gamma_P} f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Ako poligon P, čija je granica poligonalna kriva γ_P, podijelimo na trouglove $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, tada će važiti:

$$\int_{\gamma_P} f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{k} \int_{\Delta_i} f(z)\,dz = 0,$$

odakle slijedi da je

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Pošto je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, to je $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. □

Primjedba 2.3. Do
kazali smo jednu od centralnih teorema teorije funkcija komoleksne promjenljive. Tvrdjenje teoreme važi i ako se pretpostavi da je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u oblasti D ograničenoj konturom γ, a neprekidna u $\overline{D} = D \cup \gamma$. Dokaz ovog tvrdjenja nećemo izvoditi.

Iz teoreme direktno slijedi

Posljedica 2.4. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prostopovezanoj oblasti D, onda integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ po krivoj $\gamma \subseteq D$ ne zavisi od izbora krive već samo od početne i krajnje tačke.*

Primjedba 2.5. Ako se pretpostavi da je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitička u D a izvodi u_x, u_y, v_x, v_y neprekidni u D, onda se dokaz teoreme izvodi direktnom primjenom Greenove formule. Zaista, ako kriva γ ograničava skup Ω, onda, zbog ispunjenosti Cauchy-Reamannovih uslova, na osnovu Greenove teoreme slijedi:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \\
&= \int\int_\Omega (-v_x - u_y)\,dx\,dy \\
&\quad + i\int\int_\Omega (u_x - v_y)\,dx\,dy = 0.
\end{aligned}$$

Primjedba 2.6. Ako je $D \subseteq C$ prostopovezana oblast, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička funkcija u D i $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ zatvorene dio po dio glatke krive koje leže u D, pri čemu kriva Γ obuhvata svaku od krivih $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ a oblasti ograničene krivima γ_i i γ_j za $i \neq j$ nemaju zajedničkih tačaka, onda važi Cauchyeva formula za višestruko povezane oblasti:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

U gornjoj formuli podrazumijeva se da se svaka od kontura $\Gamma, \gamma_i, \ldots, \gamma_k$ obilazi suprotno kretanju kazaljke na satu.

U vezi sa Cauchyevom formulom za višestruko povezane oblasti važi primjedba slična primjedbi 3.2.3. Ako konture $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ zadovoljavaju uslove iz prethodne napomene i ako je D oblast koja se nalazi unutar konture Γ a van kontura $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, a funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u D i neprekidna u $\overline{D} := D \cup \partial D$, onda je

$$\int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{i=0}^{k} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 0.$$

Gornja formula se, ponekad, kratko piše u obliku

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0,$$

pri čemu se podrazumijeva da se granica δD oblasti D obilazi tako da oblast ostaje sa lijeve strane (vidi sliku 3.2).

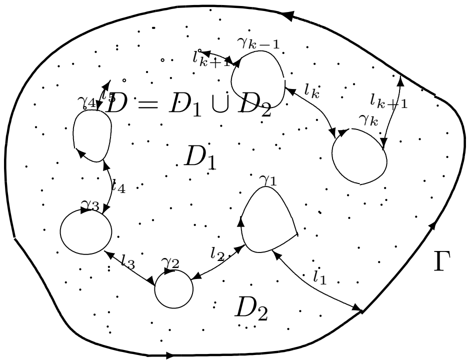
Dokaz formule za višestruko povezane oblasti izvodi se tako što se pored kontura Γ, γ_i, $i = 1, \ldots, k$, posmtraju krive $l_1,, l_2,, \ldots, l_k,, l_{k+1}$ koje spajaju redom Γ sa γ_1, γ_1 sa $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$ sa Γ (vidi sliku 3.2). Oblast ograničena konturom Γ se, na taj način, dijeli na dvije prostopovezane oblasti D_1 i D_2 čije su granice dio po dio glatke zatvorene krive ∂D_1 i ∂D_2. Tada je

$$\int_{\partial D_1} f(z)\,dz = \int_{\partial D_2} f(z)\,dz = 0.$$

Sabirajući ove dvije jednakosti i uzimajući u obzir da se po svakoj od krivih $l_1, \ldots, l_{k+1}$ integrali dva puta, pri čemu sa suprotnimm orijenatacijama, dobijamo Cauchyevu formulu za višestruko povezane oblasti.

Teorema 2.7 (Cauchyeva integralna formula)**.** *Neka je $D \subseteq C$ prostopovezana oblast, $\gamma \subseteq D$ zatvorena dio po dio glatka kriva koja obuhvata tačku z i funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u D. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\,d\eta.$$



Slika 3.2: Orijentacija granice višestruko povezane oblasti

Dokaz. Oko tačke z opišimo krug k_r poluprečnika r, koji je obuhvaćen krivom γ. Tada je, prema Cauchyevoj teoremi za višetruko povezan oblasti,

$$\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta = \int_{k_r} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta.$$

Dalje je

$$\int_{k_r} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta = \int_{k_r} \frac{f(z)}{\eta - z}\, d\eta + \int_{k_r} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}\, d\eta$$

$$= 2\pi i f(z) + \int_{k_r} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}\, d\eta.$$

Ocijenimo posledniji integral. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji realan broj $\delta > 0$, takav da

$$|\eta - z| < \delta \Longrightarrow |f(\eta) - f(z| < \varepsilon.$$

Ako je $r \leq \delta$, tada je

$$0 \leq \left| \int_{k_r} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta \right| \leq \int_{k_r} \frac{|f(\eta) - f(z)|}{|\eta - z|} ds \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Kako prethodni lanac nejednakost važi za svako $\varepsilon > 0$, to je

$$\int_{k_r} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}\, d\eta = 0.$$

Dakle, imamo da je

$$\int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = 2\pi i f(z),$$

a odavde slijedi tvrdjenje teoreme. □

Primjedba 2.8. Cauchyeva integralna formula je tačna i ako se pretpostavi da je f analitička u D i neprekidna u $\overline{D} = D \cup \gamma$.

Primjer 2.9. Neka je $0 < \rho < 1$. Tada je, prema Cauchyevoj teoremi,

$$\int_{|z|=\rho} \frac{e^z}{1+z^2} dz = 0.$$

Ako je $\rho > 1$, tada oko tačaka $z_1 = -i$ i $z_2 = i$ postoje kruńice k_1 i k_2 koje su obuhvaćene kružnicom $k = \{z : |z| = \rho\}$. Tada je, prema Cauchyevoj teoremi za višestruko povezane oblasti

$$\int_{|z|=\rho} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{k_1} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{k_2} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Primjenom Cauchyeve integralne formule dobijamo da je

$$\int_{k_1} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{k_1} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i} dz = 2\pi i \frac{e^{-i}}{-i-i} = -\pi e^{-i}$$

i

$$\int_{k_2} \frac{e^z}{1+z^2} dz = \int_{k_2} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^{i}}{i+i} = \pi e^{i}$$

Odavde slijedi da je za $\rho > 1$,

$$\int_{|z|=\rho} \frac{e^z}{1+z^2} dz = \pi(e^i - e^{-i}) = 2\pi i \sin 1.$$

Kasnje ćemo razviti i druge metode za računanje integrala funkcija kompleksne promjenljive.

Formulisaćemo i dokazati još jednu teoremu o integralima tipa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\,d\eta$$

Neka je, dakle, γ dio po dio glatka kriva i $f : D \to C$ funkcija definisana na nekom skupu D koji sadrži krivu γ. Pretpostavimo da je f neprekidna na γ. Tada je sa

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\,d\eta$$

definisana funkcija $F : \mathbb{C} \setminus \gamma \mapsto \mathbb{C}$. Za integral na desnoj strani gornje jednakosti se kaže da je *Cauchyev integral.* U sljedećoj teoremi i njenim posljedicama utvrdićemo neka svojstva funkcije definisane Cauchyevim integralom.

Teorema 2.10. *Ako je $\gamma \subseteq C$ dio po dio glatka kriva, funkcija f neprekidna na $\gamma, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma, r > 0$ i $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma$, onda je*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\,d\eta, n = 0, 1, \ldots.$$

Dokaz. Na krivoj γ postoji (bar jedna) tačka najbliža tački z_0, pa je rastojanje d od tačke z_0 do krive γ pozitivno. Neka je $0 < r < d$. Tada je $|\frac{z-z_0}{\eta-z_0}|\frac{r}{d} < 1$ za svako $z \in K(z_0, r)$ i svako $\eta \in \gamma$. Slijedi da je

$$\frac{f(\eta)}{\eta - z} = f(\eta)\frac{1}{\eta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\eta-z_0}} = \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\eta),$$

gdje je

$$g_n(\eta) = \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n.$$

Pri tome, uzimajući u obzir da je f ograničena (jer je neprekidna) na γ, imamo:

$$(\forall \eta \in \gamma)\ (\forall z \in K(z_0, r))|g_n(\eta)| \leq \frac{M}{|\eta - z_0|}\left|\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right|^n \leq \frac{M}{d}\cdot\left(\frac{r}{d}\right)^n \leq M_1 \cdot q^n,$$

gdje je $0 \leq q < 1$. Odavde, prema Waierstrassovom kriterijumu, slijedi da red neprekidnih funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\eta)$ konvergira ravnomjerno na γ, pa ga možemo integrliti član po član. Integraljenjem dobijamo:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma g_n(\eta) d\eta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta.$$

□

Posljedica 2.11. *Ako je γ dio po dio glatka kriva i funkcija f neprekidna na γ i F funkcija iz prethodne teoreme, onda za svako $n \in N$ i svako $z \in C \setminus \gamma$ postoji $F^{(n)}(z)$ i pri tome je*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}} d\eta.$$

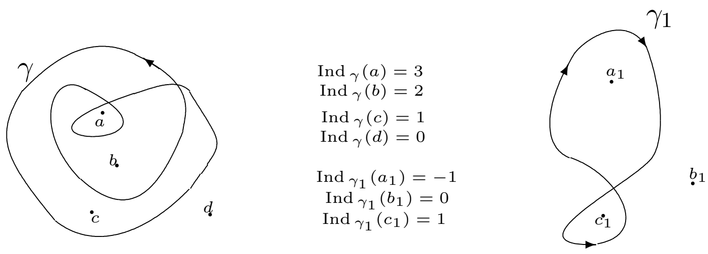
Dokaz. Fiksirajmo tačku $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Na osnovu prethodne teoreme slijedi da postoji krug $K(z_0, r)$ takav da je $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $z \in K(z_0, r)$, pri čemu je $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta$. Na osnovu posledice (6.9) dobijamo da je $c_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}$, odnosno $F^{(n)}(z_0) = n! c_n$ a odavde, na osnovu prethodne teoreme slijedi tvrđenje. □

Posljedica 2.12. *Neka je $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ dio po dio gladak zatvoren put u $\mathbb{C}$ sa nosačem γ^*. Tada je*

$$f(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t - z},\ z \in \Omega.$$

cjelobrojna funkcija koja je konstantna na povezanim komponentama skupa $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Pri tome je na neograničenoj komponenti povezanosti $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Dokaz. Funkciju $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ nazivamo indeksom tačke z u odnosu na put γ.



Slika 3.3: Primjeri indeksa tačaka u odnosu na puteve

Na slici 3.3 je data geometrijska interpretacija indeksa tačke u odnosu na put.

Primijetimo da je $\frac{w}{2\pi i}\left(= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right)$ cio broj ako i samo ako je $e^w = 1$, što je ekvivalentno sa uslovom $\psi(t_1) = 1$, gdje je

$$\psi(s) = e^{\int_{t_0}^{s} \frac{\gamma'(t)\mathrm{d}t}{\gamma(t)-z}}.$$

Pri tome, u tačkama diferencijabilnosti preslikavanja γ važi:

$$\psi'(s) = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \cdot \gamma(s).$$

Pošto je γ dio po dio glatko preslikavanje, tačaka u kojima funkcija ψ nije diferencjabilna ima konačno mnogo. Isto svojstvo ima i funkcija $\xi(s) = \dfrac{\psi(s)}{\gamma(s) - z}$ i u tačkama diferencijabilnosti je

$$\xi'(s) = \frac{\psi'(s)}{\gamma(s) - z} - \frac{\gamma'(s)\psi(s)}{(\gamma(s) - z)^2} = 0.$$

Odavde slijedi da je $\xi(s) \equiv c$. Kako je $\psi(t_0) = 1$, to je

$$\psi(s) = \xi(s)(\gamma(s)-z) = \xi(t_0)(\gamma(s)-z) = \frac{\psi(t_0)(\gamma(s) - z)}{\gamma(t_0) - z} = \frac{\gamma(s) - z}{\gamma(t_0) - z}.$$

Pošto je $\gamma : [t_0, t_1] \to C$ zatvoren put, to je $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, odnosno $\psi(t_1) = 1$. Odavde slijedi da je $f(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ cio broj. Funkcija f je analitička (v. teoremu 2.10), pa je slika $f(D)$ svake komponenete povezanosti D povezan skup. Pri tome je $f(D)$ podskup skupa cijelih brojeva, što znači da je on jednočlan. Pored toga, iz definicije slijedi da je, za dovoljno veliko z, indeks $|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| < 1$, odakle konačno dobijamo da je $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$. □

Zadaci

1. Izračunati

   (a) $\int_{|z+i|=1} \frac{\cos z}{z+i}\, dz$,

   (b) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$,

   (c) $\int_{|z-1|=1/2} \frac{e^z\, dz}{z(1-z)^3}$.

2. Izračunati integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}$ ako je γ kontura i ako

   (a) Tačka $2i$ pripada oblasti ogrančenoj krivom γ, a tačka $-2i$ leži u neograničenoj oblasti odredjenoj sa γ.

   (b) Tačka $-2i$ pripada oblasti ogrančenoj krivom γ, a tačka $2i$ leži u neograničenoj oblasti odredjenoj sa γ.

   (c) Tačke $2i$ i $-2i$ pripadaju oblasti ogrančenoj krivom γ.

   (d) Tačke $2i$ i $-2i$ pripadaju oblasti neogrančenoj krivom γ.

3. Neka je γ kriva koja ne sadrži ni jednu od tačaka $0, i, -i$. Izračunati integral
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(1+z^2)}.$$

4. Izračunati integrale

   (a)
$$\int_{|z-a|=a} \frac{z\,\mathrm{d}z}{z^4-1},\ \ a > 1;$$

(b) Izračunati integral

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z;$$

(c) Izračunati integral

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{zt} + \sin^2 z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z,\ t > 0.$$

5. Neka je f analitička funkcija u krugu $|z-a| < R$. Dokazati da je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})\,d\varphi = f(a).$$

6. Neka je r pozitivan realan broj, a i b kompleksni brojevi takvi da je $|a| < r < |b|$. Izračunati

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-b)(z-a)^m}\,\mathrm{d}z.$$

7. Objasniti zašto $\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}\, z}{z-1/2} dz$ nije moguće računati po Cauchyevoj integralnoj formuli sa $f(z) = \mathrm{Re}\, z$. Dokazati da je za $|z| = 1$, $\mathrm{Re}\, z = (z + z^{-1})/2$ a zatim izračnati ovaj integral.

8. Neka je $R > 1$ i neka je f analitička funkcija u krugu $\{z : |z| < r\}$. Izračunati

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a} dz,$$

ako je (a) $|a| < 1$, (b) $|a| > 1$.

9. Dokazati da za funkciju F definisanu Cauchyevim integralom važi: $\lim_{z\to\infty} F(z) = 0$.

10. Dokazati da je indeks zatvorene dio po dio glatke Jordanove krive γ u odnosu na neku unutrašnju tačku jednak 1 ako je kriva pozitivno orijentisana i jednak -1 ako je ona negativno orjentisana.

11. Izračunati indeks tačke 0 u odnosu na put γ ako je

    (a) γ nastao nastavljanjem puteva γ_1, γ_2 i γ_3: $\gamma_k(t) = (5/2 - k) + ke^{it}, t \in [0, 2\pi]$;

    (b) γ nastao nastavljanjem segmenta $[-2, -1]$, puta $-\Gamma_1$, segmenta $[1, 2]$ i puta Γ_2, ako je $\gamma_k(t) = ke^{it}, t \in [0, \pi]$;

    (c) γ nastao nastavljanjem segmenta $[-5, -1]$ i puta γ_1: $\gamma_1(t) = te^{it}/\pi, t \in [\pi, 5\pi]$.

12. Neka su γ_1 i γ_2 dio po dio glatki zatvoreni putevi: $\gamma_1 : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{C}$ i $\gamma_2 : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{C}$, i γ i Γ putevi $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$, $\Gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$,$t \in [t_0, t_1]$.

    (a) Dokazati da su γ i Γ zatvoreni putevi.

    (b) Dokazati da ako $0 \notin \gamma_1 \cup \gamma_2$, tada važi $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) + \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$.

    (c) Dokazati da ako je $|\gamma_1(t)| > |\gamma_2(t)|$, za svako $t \in [t_0, t_1]$, tada je $\mathrm{Ind}_\Gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$.

3 Posljedice Cauchyevih teorema

U ovom paragrafu formulisaćemo i dokazati nekoliko značajnih teorema kompleksne analize, koja se mogu smatrati posljedicama teorije izložene u prethodnom paragrafu.

Teorema 3.1. *Neka je $D \subseteq C$ oblast i $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička funkcija u D. Tada za svako $z \in D$ i svaki prirodan broj n postoji $f^{(n)}(z)$ i pri tome je*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta,$$

gdje dio po dio glatka zatvorena kriva $\gamma \subseteq D$ orijentisana suprotno kretanje kazaljke na satu, obuhvata tačku z i ograničava oblast $G \subseteq D$.

Dokaz. Neka je γ proizvoljna kriva iz formulacije teoreme. Na osnovu Cauchyeve integralne formule slijedi da je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta.$$

Odavde i iz teoreme 3.2.10. slijedi tvrdjenje. □

Teorema 3.2 (Taylorova formula)**.** *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u oblasti D i ako $K(z_0, r) := \{z \in C : |z - z_0| < r\} \subseteq D$, onda je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\, d\eta, n = 0, 1, \ldots.$$

Dokaz. Tvrdjenje teoreme je posljedica Cauchyeve integralne formule, teoreme 3.2.9. i prethodne teoreme. □

Posljedica 3.3. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u oblasti D onda je i funkcija $f' : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u D.*

Dokaz. Za svako $z_0 \in D$ funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ može se predstaviti stepenim redom u nekom krugu $K(z_0, r)$, pri čemu poluprečnik konvergencije $r > 0$ zavisi od z_0. Na osnovu teoreme 2.6.8, u krugu $K(z_0, r)$ stepenim redom se može predstaviti i funkcija $f'(z)$, pa je i f' analitička funkcija u tački z_0. □

Posljedice Taylorove teoreme o razvoju analitičke funkcije u red su dva zanimljiva svojstva analitičkih funkcija, koja dokazujemo u sljedećim dvjema teoremama.

Teorema 3.4 (o nulama analitičke funkcije)**.** *Ako analitička funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ u oblasti D nije identički jednaka nuli, onda je skup* $\mathrm{Nul}(f) := \{z \in D : f(z) = 0\}$ *najviše prebrojiv, nema ni jednu tačku nagomilavanja u D i za svako $z_0 \in \mathrm{Nul}(f)$ postoji tačno jedan prirodan broj $n = n(z_0)$, takav da je $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, gdje je $g(z)$ analitička funkcija u D, pri čemu je $g(z_0) \neq 0$.*

Dokaz. Neka $z_0 \in \mathrm{Nul}(f)$ proizvoljna nula funkcije f i neka je $K(z_0, r)$: $\{z \in C : |z - z_0| < r\} \subseteq D$. Tada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, z \in K(z_0, r).$$

Primijetimo da je $c_0 = 0$ (jer je $f(z_0) = 0$), a nije identički jednaka nuli, bar jedan od koeficijenata c_n je različit od nule. Uočimo $c_m \neq 0$ sa najmanjim indeksom $m \in N$. Tada je

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m g(z), z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$g(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots, z \in K(z_0, r).$$

Pri tome je $g(z_0) = c_m \neq 0$. Funkcija g je analitička u $K(z_0, r)$. Odavde slijedi da je g neprekidna u z_0, pa postoji okolina $\mathcal{O}(z_0) \subseteq D$ tačke z_0 u kojoj je $g(z) \neq 0$. To znači da je $f(z) \neq 0$ za svako $z \in \mathcal{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$, pa je z_0 izolovana nula funkcije $f(z)$. Ako bi $a \in D$ bila tačka nagomilavanja skupa $\mathrm{Nul}(f)$, onda bi, zbog neprekidnosti funkcije f, tačka a pripadala skupu $\mathrm{Nul}(f)$. Tada bi a bila izolovana tačka skupa $\mathrm{Nul}(f)$, što je suprotno sa dokazanim svojstvom nula funkcije f. Odavde slijedi i da je skup $\mathrm{Nul}(f)$ najviše prebrojiv. $\square$

Broj $n = n(z_0)$ iz iskaza teoreme nazivamo redom nule z_0 funkcije f a tačku z_0 nulom n-tog reda te funkcije.

Teorema 3.5 (o jedinstvenosti analitičke funkcije)**.** *Ako su funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$ i $g : D \to \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i ako je $f(z) = g(z)$ na nekom skupu $A \subseteq D$ koji ima tačku nagomilavanja, onda je $f(z) = g(z)$ za svako $z \in D$.*

Dokaz. Funkcija $F(z) = f(z) - g(z)$ je analitička na D i jednaka je nuli na A. Na osnovu prethodne teoreme slijedi da je $F(z) = 0$ na D, što znači da je $f(z) = g(z)$ za svako $z \in D$. $\square$

Primjedba 3.6. Teorema o jedinstvenosti analitičke funkcije u bliskoj je vezi sa tehnikom analitičkog produženja. Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ nalitička u oblasti D a funkcija $F : E \mapsto \mathbb{C}$ analitička u oblasti $E \supseteq D, E \neq D$, i ako je $F(z) = f(z)$ za $z \in D$, tada se kaže da je F analitičko produženje (sa D na E) funkcije f. Prema teoremi o jedinstvenosti, ne mogu postojati dva različita analitika produženja funkcije f. Kao primjer, možemo posmatrati funkcije

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ i } F(z) = \frac{1}{1+z}.$$

koja je analitička postoji, ono je jedinstveno. Funkcija f je analitička u $D := K(0,1) = \{z : |z| < 1\}$, (to je krug konvergencije stepenog reda $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$), dok je funkcija F analitička u oblasti $E := \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Pri tome je $F(z) = f(z)$ za $|z| < 1$, pa je F analitičko produženje sa D na E. Zanimljivo je da ne postoji analitičko produženje funkcije f sa D na oblast koja sadrži skup $\overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$, (zašto?).

Naravno, ponekad nije moguće analitički produžiti funkciju koja je analitička u oblasti $D \neq \mathbb{C}$. Ako želimo pokušati da produžimo funkciju f, definisanu stepenim redom, tada je prirodno da se u krugu konvergencije $K(z_0, r)$ izabere neka tačka $z_1 \neq z_0$ i napiše Taylorv red te funkcije u okolini tačke z_1, tj. da se posmatra funkcija

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n.$$

Može se dogoditi da ovaj novi red konvergira u krugu $K(z_1, r_1)$, koji nije sadržan u $K(z_0, r)$. Tada funkciju f možemo analitički produžiti postavljajući $F(z) = f_1(z)$ za $z \in K(z_1, r_1)$ (pri tome ostavljamo $F(z) = f(z)$ za $z \in K(z_0, r)$). Postupak možemo ponavljati više puta. Recimo, ako je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}},$$

konvergira u krugu $K(i, \sqrt{5})$ ka funkciji $g(z) = \frac{1}{2-z}$. Funkciju $g(z)$ možemo razviti u Taylorov red oko tačke 0 :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, z \in K(0,2),$$

koji nije dio kruga $K(i, \sqrt{5})$. Na taj način imamo analitičko produženje F funkcije f sa kruga $D = K(i, \sqrt{5})$ u oblast $E = K(i\ \sqrt{5}) \cup K(0,2)$ definisano sa

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in K(i, \sqrt{5}) \\ g(z), & z \in K(0,2). \end{cases}$$

Postupak možemo nastaviti praveći razvoj funkcije f, na primjer, u okolini tačke $z_2 = i + 2$ i tako dalje.

Pitanje mogućnosti i načina analitičkog produženja ima važnu ulogu u teoriji funkcija kompleksne promjenljive. Recimo, u izučavanju svojstava Riemmannove zeta funkcije i dalje u izčavanju svojstava prostih brojeva, važnu ulogu ima pitanje analitičkog produženja. Mi ćemo ova pitanja, i pored njihove nesumnjive važnosti ostviti po strani.

Sljedeća teorema se može smatrati inverznom Cauchyevoj teoremi.

Teorema 3.7 (Morerina teorema)**.** *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ neprekidna na nekom otvorenom skupu D i ako je za svaki trougao $\Delta \subseteq D$*

$$\int_\Delta f(z)\, dz = 0,$$

onda je f analitička u D.

Dokaz. Neka je $z_0 \in D$, i $K(z_0, r) = \{z \in C : |z - z_0| < r\}$ krug koji leži u D i $F : K(z_0, r) \mapsto \mathbb{C}$ funkcija definisana formulom

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\eta) d\eta.$$

Ako je $z \in K(z_0, r)$, tada za dovoljno malo h trougao Δ, čija su tjemena tačke z_0, z, $z+h$, leži u $K(z_0, r)$ pa dakle i u D. Tada je, prema pretpostavci teoreme,

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{[z_0,z]} f(z)dz + \int_{[z,z+h]} f(z)dz + \int_{[z+h,z_0]} f(z)dz = 0.$$

Odavde slijedi

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\eta)d\eta - \int_{[z_0,z+h]} f(\eta)d\eta = \int_{[z,z+h]} f(\eta)d\eta$$

gdje se integrali po dužima $[z_0, z]$, $[z_0, z + h]$ i $[z, z + h]$, koje, ponavlajmo, za dovoljno malo h, pripadaju krugu $K(z_0, r)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$, takvo da je

$$|\eta - z| < \delta \Longrightarrow |f(\eta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Izaberimo $h \in C$, takvo da je $|h| < \delta$. Neka je i $\varphi : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$, gdje je $\varphi(t) = z + th$, parametrizacija duži $[z, z+h]$. Tada je

$$\begin{aligned} \int_z^{z+h} f(\eta)\,d\eta &= \int_0^1 f(z+th)h\,dt \\ &= \int_0^1 [f(z+th) - f(z)]h\,dt + \int_0^1 f(z)h\,dt \\ &= \int_0^1 [f(z+th) - f(z)] + f(z)h. \end{aligned}$$

Odavde i iz pretpostavljene neprekidnosti funkcije f slijedi:

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 [f(z+th) - f(z)]\,dt\right| \\ &\le \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\,dt \\ &\le \varepsilon \int_0^1 dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

To znači da je funkcija F diferencijabilna u svakoj tački z kruga $K(z_0, r)$ i pri tome je $F'(z) = f(z)$. Dakle, F je analitička funkcija, pa za svako $z \in K(z_0, r)$ postoji $F''(z)$, odnosno, za svako $z \in K(z_0, r)$ postoji $f'(z) = F''(z)$. Kako z može biti proizvoljna tačka skupa D, slijedi da je funkcija f analititička u D. □

U nekoliko sljedećih tvrdjenja koristićemo pojam primitivne funkcije, odnosno neodredjenog integrala kompleksne funkcije.

Definicija 3.8. Analitička funkcija $F : D \to \mathbb{C}$ je primitivna funkcija funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$ ako je $F'(z) = f(z)$, za svako $z \in D$.

Lako se dokazuje da ako je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f u oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$, tada je $\{F + c : c \in \mathbb{C}\}$ skup svih primitivnih funkcija funkcije f.

Primijetimo da je u toku dokazivanja Morerine teoreme dokazano je i sljedeće tvrdjenje.

Teorema 3.9. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ neprekidna u prostopovezanoj oblasti D i ako je za svaku konturu $\gamma \subseteq D$, integral $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, onda je za svako $z_0 \in D$ funkcija $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\eta)d\eta$ primitivna funkcija funkcije f.*

Sljedeća dva tvrdjenja su neposredne posljedice ove teoreme.

Posljedica 3.10. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prostopovezanoj oblasti D i $z_0 \in D$, onda je $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\eta)d\eta$, $z \in D$, primitivna funkcija funkcije f u oblasti D.*

Posljedica 3.11 (Newton-Leibnizova formula)**.** *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prostopovezanoj oblasti D i F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f, onda za bilo koje dvije tačke $z_0, z_1 \in D$ važi:*

$$\int_{[z_0,z]} f(\eta)d\eta = F(z_1) - F(z_0).$$

4 Posljedice Cauchyevih teorema - nastavak

U ovom dijelu dokazujemo još nekoliko posljedica Cauchyievih teorema o integralima kompleksnih funkcija.

Teorema 4.1 (Cauchyeva nejednakost)**.** *Ako je funkcija $f : K(z_0, r) \to C$ analitička u $K(z_0, r)$ i ako je $|f(z)| \leq M$ za svako $z \in K(z_0, r)$, onda je*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}.$$

Dokaz. Neka je $0 < \delta < r$. Tada je

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} \eta,$$

gdje je γ krug $\{z : |z - z_0| < \delta\}$. Slijedi da je

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{n+1}} ds \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma \frac{M}{\delta^{n+1}} ds = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{\delta^{n+1}} 2\delta\pi = \frac{M \cdot n!}{\delta^n}. \end{aligned}$$

Gornja nejednakost važi za svako $\delta < r$, a za $\delta \to r$ dobijamo tvrdjenje teoreme. $\square$

I u sljedećem svojstvu analitičkih funkcija može se vidjeti značajna razlika u pojmu diferencijabilnosti funkcija realnih i kompleksnih funkcija.

Teorema 4.2. *Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ funkcija $f_n(z)$ analitičkih u oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ konvergira ravnomjerno na svakom kompaktnom podskupu $D' \subseteq D$, onda je suma $f(z)$ tog reda analitička funkcija na D i za svaki prirodan broj l red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(l)}(z)$ konvergira ravnomjerno na svakom kompaktnom podskupu skupa D. Pri tome je*

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(l)}(z), z \in D.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je tvrdjenje tačno za $l = 1$. Neka je $\gamma \subseteq D$ kontura koja ograničava oblast $A \subseteq D$. Na osnovu teoreme 3.1.5. o integraciji funkcionalnog reda, slijedi da je

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = 0,$$

a odavde, na osnovu Morerine teoreme slijedi da je f analitička funkcija na D.

Pretpostavimo sada da je $D' \subseteq D$ kompaktan skup. Sa $s_n(z), z \in D$, označimo sumu $\sum_{k=1}^{n} f_n(z)$. Jasno je da je, za svaki prirodan broj n s_n analitička funkcija na D. Pri tome, niz (s_n) konvergira ravnomjerno na D' ka funkciji f. Izaberimo $r > 0$ takvo da $\Omega := \bigcup_{z\in K} \overline{K(z,r)} \subseteq D$. Skup Ω je kompaktan. Na osnovu Cauchyeve nejednakosti slijedi da je, za svako $z \in K$,

$$|f'(z) - s_n'(z)| < \frac{\sup_{\eta\in\Omega} |f(\eta) - s_n(\eta)|}{r}$$

Odavde, uzimajući u obzir da niz (s_n) konvergira ravnomjerno na D' ka funkciji f, slijedi da niz (s_n') konvergira ravnomjerno na D' ka funkciji f'. □

Neposredna posljedica Cauchyieve nejednakosti je sljedeće svojstvo cijelih funkcija.

Teorema 4.3 (Liouvilleova teorema)**.** *Svaka ograničena cijela funkcija je konstanta.*

Dokaz. Pretpostavimo da za cijelu funkciju $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ postoji pozitivan realan broj M, takav da je $|f(z)| \leq M$, za svako svako $z \in C$. Pošto je f cijela funkcija, ona je za svako $r > 0$ analitička u krugu $k(0,r) = \{z : |z| < r\}$. Slijedi da je za svako $z \in \mathbb{C}$ i za svako $r > 0$,

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Odavde, puštajući da $r \to +\infty$, slijedi $f'(z) = 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$, i dalje, $f = const.$ □

Primjer 4.4. Pretpostavimo da je funkcija f holomorfna u $\overline{\mathbb{C}}$ i dokažimo da je tada ona konstantna. Zaista, tada je f ograničena funkcija, (jer je f analitička u beskonačno udaljenoj tački), pa je, Liouvilleovoj teoremi ona konstantna.

I sljedeće svojstvo je posljedica Cauchyeve teorije integralima kompleksnih funkcija.

Teorema 4.5 (Princip maksimuma modula)**.** *Neka je $D \subseteq C$ oblast, $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička funkcija u D i $\overline{K}(z_0,r) := \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta - z_0| \leq r\}$. Tada*

(i) $|f(z_0)| \leq \max\{|f(z_0 + re^i\theta)| : 0 \leq \theta < 2\pi\}$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $f = const$;

(ii) Ako funkcija f nema nula na skupu $K(z_0,r)$, onda je $|f(z_0)| \geq \min\{|f(z_0 + re^{i\theta})| : 0 \leq \theta < 2\pi\}$;

(iii) Ako funkcija f nije konstantna na D, onda $|f|$ ne dostiže najveću vrijednost na D.

(iv) Ako je $\gamma \subseteq D$ dio po dio glatka zatvorena kriva koja obuhvata tačku $z_0 \in D$ i ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, onda je $|f(z_0)| \leq \max\{|f(z)| : z \in \gamma\}$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $f = const$.

Dokaz. Imamo da je

$$\begin{aligned}|f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0)|=r}\frac{f(\eta)}{\eta - z}\,d\eta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\eta - z_0||=r}\frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|}ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi r}\max\{|f(\eta)\ |: |\eta - z_0| = r\}\cdot 2\pi r \\ &= \max\{|f(z_0 + re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\},\end{aligned}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je funkcija f konstanta. Tvrdjenje (i) je dokazano.

Tvrdjenje (iii) je direktna posledica tvrdjenja (i).

Dalje, skup $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma \subseteq D$ je kompaktan, funkcija $|f|$ je neprekidna na $\overline{\Omega}$, pa postoji tačka $z_1 \in \overline{\Omega}$, takva da je $|f(z_1)| \geq |f(z)|$ za svako $z \in \overline{\Omega}$. Tada je $z_1 \neq z_0$, jer bi u protivnom, na osnovu (iii), funkcija f morala biti konstantna na Ω, a prema teoremi o jedinstvenosti analitičke funkcije, tada bi f bila konstantna na D. Time je dokazano tvrdjenje (iv).

Za dokaz tvrdjenja (ii) treba primijetiti da ako je $f(z_0 + re^{i\theta}) \neq 0$ za svako $0 \leq \theta < 2\pi$, onda je dovoljno primijeniti tvrdjenje (i) na funkciju $g = \frac{1}{f}$, a ako je za neko $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi, f(z + re^{i\theta}) = 0$, onda je tvrdjenje (ii) očigledno tačno . $\square$

I poznata osnovna teorema algebre može se izvesti kao posljedica Liouvilleove teoreme, koja je opet skoro neposredna posljedica Cauchyeve teorije o integraciji kompleksnih funkcija.

Teorema 4.6 (Osnovna teorema algebre)**.** *Neka je $P_n(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ polinom stepena $n \geq 1$ sa koeficijenmtima iz polja kompleksnih brojeva. Tada postoji tačka $z_0 \in C$ za koju je $P_n(z_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $P_n(z) \neq 0$ za svako $z \in C$. Tada je

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

cijela funkcija. Pri tome je

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|z^n| - |\alpha_{n-1}||z^{n-1}| - \cdots - |\alpha_1||z| - |\alpha_0|} \to 0 \text{ kada } |z| \to \infty.$$

Slijedi da postoji $r > 0$, takvo da je $|f(z)| \leq 1$ za $|z| \geq r$. Kako je za $|z| \leq r, |f(z)| \leq M$, to je $|f(z)| \leq M_1 := \max\{1, M\}$, za svako $z \in C$. Medjutim, prema Liouvillovoj teoremi, cijela funkcija $\frac{1}{f(z)}$, koja očigledno nije konstanta, ne može biti ograničena na C. $\square$

Sljedeće zanimljivo tvrdjenje je posljedica principa maksimuma modula.

Teorema 4.7 (Schwartzova lema)**.** *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitička u krugu $D = \{z : |z| < 1\}$, i ako je $f(0) = 0$ i $|f(z)| < 1$ na D, onda je*

$|f'(0)| \leq 1$ i $|f(z)| \leq |z|$ na D. Ako je pri tome ispunjen jedan od slledeća dva uslova

(i) Za bar jedno $z_0 \in D, z_0 \neq 0, |f(z_0)| = |z_0|$;

ii) $|f'(0)| = 1$,

onda je ispunjen i drugi i tada je $f(z) = az$, gdje je $|a| = 1$.

Dokaz. Ako je $f(z) \equiv 0$, onda je tvrdjenje očigledno, tačno. Ako je $f(z) \not\equiv 0$, onda, na osnovu teoreme o nulama analitičke funkcije, slijedi da je $f(z) = zg(z)$, gdje je $g(z)$ analitička funkcija. Ako je $|z| < r < 1$, onda, na osnovu principa maksimuma modula, slijedi da je

$$|g(z)| < \max\{|g(\eta)| : |\eta| = r\} = |g(re^{i\theta})| = \frac{|f(re^{i\theta})\ |}{r} < \frac{1}{r}.$$

Puštajući da $r \to 1$ dobijamo da je

$$|g(z)| \leq 1 \text{ za svako } z \in D,$$

odakle slijedi da je za svako $z \in D$,

$$|f(z)| \leq z.$$

Kako je $f'(0) = g(0)$, to je $|f'(0)| \leq 1$. Ako je ispunjen uslov (i) onda je $|g(z_0)| = 1$, pa je, prema principu maksimuma modula, $g = const$, odnosno, $g(z) \equiv= a$, pri čemu je $|a| = |g(z_0)| = 1$ i $|f'(0)| = |a| = 1$. Ako je ispunje uslov (ii), onda je $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, što znači da funkcija $|g|$ najveću vrijednost na D dostiže u ta cki $z = 0$. Odavde, prema prinicpu maksimuma modula, slijedi da je tada $g(z) = const$ i $f(z) = az$, $|a| = 1$ i $|f'(0)| = 1$.

Dakle, ako je ispunjen jedan od uslova (i) ili (ii), onda je $f(z) = az$, gdje je $a = e^{i\phi}$; ako je $z = \rho e^{i\theta}$, onda je $f(z) = \rho e^{i(\phi+\theta)}$ i preslikavanje f je rotacija za ugao ϕ. □

Koristeći Cauchyevu teoremu dokazaćemo da su vrijednosti real nog (imaginarnog) dijela analitičke funkcije u unutrašnjosti kruga odredjeni odgovarjućim vrijednostima te funkcije na granici kruga.

Teorema 4.8 (Poissonova formula)**.** *Neka je funkcija $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{C}$ analitička u krugu $D = \{z : |z| < 1\}$ i neprekidna na $\overline{D}$. Tada za svako $z = \rho e^{i\varphi} \in D$ važi:*

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(t - \varphi) + \rho^2} \operatorname{Re}(f(e^{it}))dt.)$$

Dokaz. Ako je $z \in D$ onda $z_* = 1/\bar{z} \in \mathbb{C} \setminus D$, pa je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{f(\eta)}{\eta - z}\, d\eta, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{f(\eta)}{\eta - z_*}\, d\eta.$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve, zatim postavljanjem $z = \rho e^{i\varphi}, \overline{z} = \rho e^{-i\varphi}, z_* = (1/\rho)e^{i\varphi}, 0 \le \rho < 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, \eta = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi,$ dobijamo

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho^2) f(e^{it}) dt}{1 - 2\rho\cos(t-\varphi) + \rho^2} dt.$$

Razdavajajući u prethodnoj formuli realni i imaginarni dio dobijamo Poissonovu formulu i sličnu formulu za $\operatorname{Im} f(z)$:

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(t-\varphi) + \rho^2} \operatorname{Im}(f(e^{it}))dt.$$

□

Primjer 4.9. Odrdimo rješenje Dirishletove jednačine

$$\Delta u(x,y) = 0, (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x)^2 + (y)^2 < r^2\}$$

koje je neprekidno na $\overline{D} = D \cup \partial(D)$ i koje zadovoljava uslov:

$$u(x,y) = g(x,y) \text{ na } \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x)^2 + (y)^2 = r^2\},$$

gdje je g neprekidna funkcija na ∂D.

Kako je u harmonijska funkcija, ona je relani dio neke analitičke funkcije f, pa je, prema prethodnoj teoremi,

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t) \frac{1-|z|^2}{|e^{it} - z|^2}\, d\,z = x + iy,$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
u(x,y) &- g(x_0,y_0) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t)\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}dt - \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z\ |^2}dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (g(\cos t, \sin t) - g(x_0,y_0))\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}dt.
\end{aligned}$$

Odavde, uzimajući u obzir ravnomjernu neprekidnost funkcije g na kružnici ∂D, slijedi da $u(x, y) \to g(x_0, y_0)$ kada $(x, y) \to (x_0, y_0) \in \partial D$.

Teorema 4.10 (Schwartzova formula)**.** *Ako je funkcija* $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{C}$ *analitička u krugu* $D = \{z : |z| < 1\}$ *i neprekidna na* $\overline{D}$, *tada je, za svako* $z = \rho e^{i\varphi} \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ f(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + i \,\mathrm{Im}\ f(0).$$

Dokaz. Funkcija

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\ f(e^{t}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt$$

je analitička u D i pri tome je $\mathrm{Im}\ g = 0$. Iz Poissonove formule slijedi da se njen raelni dio poklapa sa realnim dijelom funkcije f, pa je njihova razlika $f - g$ konstantna na D i ta je konstanta jednaka $f(0) - g(0) = i\,\mathrm{Im}\ f(0)$. Dakle, $f(z) = g(z) + iImf(0)$, odakle slijedi Schwartzova formula. □

Zadaci

1. Dokazati da ako je F primitivna funkcija funkcije f, onda je $\{F + c : c \in \mathbb{C}\}$ skup svih primitivnih funkcija funkcije f.

2. Neka je funkcija f analitička u oblasti $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $|f(z) \le M, z \in D, f(z_0) = 0, z_0 \in D$. Dokazati da je

   (a)
   $$|f(z) \le \frac{Mr|z - z_0|}{|r^2 - z\overline{z_0}|},\ z \in D.$$

   (b)
   $$|f'(z_0)| \le \frac{Mr}{r^2 - |z_0|^2}.$$

3. Dokazati da polinom $P_n(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ (n prirodan broj ≥ 1) sa koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva ima tačno n nula u $\mathbb{C}$.

4. Neka je f analitička funkcija koja preslikava jedinični disk u jedinični disk D. Neka je $z = 0$ nula višestrukosti n funkcije f. Dokazati da je $|f(z)| \leq |z|^n$ za $z \in D$. Dokazati da ako pri tome u nekoj tački diska D važi jednakost $|f(z)| = |z|^n$, onda je $f(z) = cz^n$, gdje je $|c| = 1$.

5. Neka je f analitička funkcija koja preslikava jedinični disk na sebe. Dokazati da ako f ima dvije fiksne tačke, onda je $f(z) = z$.

6. Pretpostavimo da je f analitička funkcija na jediničnom disku D i neprekidna na granici ∂D. Dokazati da ako je $|f(z)| \leq M_1$ za $z \in \partial D, \mathrm{Re}\ z > 0$ i $|f(z)| \leq M_2$ za $z \in \partial D, \mathrm{Re}\ z \leq 0$, tada je $|f(0)| \leq \sqrt{M_1 \cdot M_2}$. (*Uputstvo*: funkcija $g(z) = f(z) \cdot f(-z)$ je analitička na jediničnom disku i na granici zadovoljava uslov $|g(z)| \leq M_1 M_2$. Zato je $|g(0)| = |f^2(0)| \leq M_1 M_2$).

7. Neka je f analitička funkcija na jediničnom disku D i neprekidna na granici ∂D. Dokazati da ako za svako $k = 0, \ldots, n-1$ i svako z koje zadovoljava uslov $2k\pi/n < \arg z < 2(k+1)\pi/n$, važi $|f(z)| \leq M_k$ za $z \in \partial D$, tada je $|f(0)| \leq \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} M_k}$.

8. Neka je funkcija f analitička na pravilnom $n-$touglu M, sa jednim tjemenom u tački $z = 1$ i centrom u 0 i neprekidna na granici ∂M. Dokazati da ako za svako $k = 0, \ldots, n-1$ i svako z koje zadovoljava uslov $z \in \partial D, 2k\pi/n < \arg z < 2(k+1)\pi/n$ važi $|f(z)| \leq M_k$, tada je $|f(0)| \leq \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} M_k}$.

9. Dokazati da ako je funkcija f analitička u oblasti D, različita od konstante, tada jednačina $f(z) = a$ ne može imati beskonačno mnogo rješenja u oblasti D.

10. Da li postoji funkcija f koja je analitička u nekoj okolini tačke nula i koja zadovoljava uslov

    (a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\frac{n\pi}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

    (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}\frac{n\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$;

(d) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

(e) $2^{-n} < \left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < 2^{1-n}$

(f) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| < \dfrac{1}{n^2},.$

11. Odrediti analitičke funkcije u okolini tačke z_0 koje zadovoljavaju uslove

 (a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\pi}{n}$, $z_0 = 0$;

 (b) $f\left(\dfrac{2}{n}\right) = \sin\dfrac{1}{n}$, $z_0 = 0$;

 (c) $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = e^{\frac{1}{n}}$, $z_0 = 1$;

 (d) $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2+2n+1}$, $z_0 = 1$;

 (e) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\cos^2 \pi n}{2n+1}$, $z_0 = 0$.

12. Odrediti sve analitičke funkcije takve da je $f(0) = 1$ i koje u nekoj okolini tačke $z_0 = 0$ zadovoljavaju uslov $f(2z) = f(3z)$.

13. Dokazati da je $\sin 2z = 2\sin z\cos z$ za svako $z \in \mathbb{C}$.

14. Neka su funkcije f_1 i f_2 analitičke u oblasti D i u toj oblasti zadovoljavaju diferencjalnu jednačinu $f'(z) = P(z, f(z))$, gdje je $P(z, w)$ polinom. Dokazati da ako u nekoj tački $z_0 \in D$ važi jednakost $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, onda je $f_1(z) \equiv f_2(z)$ na D.

15. Neka su funkcije f_1 i f_2 analitičke u oblasti D i u toj oblasti zadovoljavaju diferencjalnu jednačinu $f^{(m)}(z) = P(z, f, f', \ldots, f^{m-1})$, gdje je $P(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ polinom. Dokazati da ako u nekoj tački $z_0 \in D$ važe jednakosti $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, $f_1'(z_0) = f_2'(z_0)$, $\ldots$, $f_1^{m-1}(z_0) = f_2^{m-1}(z_0)$, onda je $f_1(z) \equiv f_2(z)$ na D.

16. Neka je f cijela funkcija koja zadovoljava uslov $|f(z)| \le e^x$, gdje je $x = \mathrm{Re}\ z$. Dokazati da postoji konstanta $c \in \mathbb{C}, |c| \le 1$, takva da je $f(z) = ce^z$.

17. Neka je f cijela funkcija. Dokazati sljedeća tvrdjenja:

    (a) Ako je $f(z + 2\pi) = f(z)$ i $f(z + 2\pi i) = f(z)$ za svako $z \in \mathbb{C}$. tada je f konstanta.

    (b) Ako je $|f(z)| \ge M$ za svako $z \in \mathbb{C}$, tada je f konstanta.

    (c) Ako je e^f ograničena funkcija, tada je f konstanta.

    (d) Ako je $\mathrm{Re}\ f$ ograničena funkcija, tada je f konstanta.

    (e) Ako $f(z) \to \infty$ kada $|z| \to \infty$, tada je $f(z) \equiv 0$.

5 Laurentov red. Izolovani singulariteti

U prethodnom paragrafu dokazali smo da se svaka funkcija koja je analitička u krugu može predstaviti stepenim redom, i obrnuto, da je funkcija koja je predstavljena stepenim redom analitička u krugu konvergencije tog reda. Za formulu kojom se uspostavlja jednakost analitičke funkcije i nekog stepenog reda govorili da je Taylorova formula. Laurentova formula je uopštenje Taylorove formule; ona se odnosi na funkcije analitičke u kružnom prstenu, a članovi odgovarajućeg reda su funkcije oblika $a(z - z_0)^n$, pri čemu stepeni n mogu biti proizvoljni cijeli brojevi.

Teorema 5.1 (Laurentova teorema)**.** *Ako je funkcija* $f : K \mapsto \mathbb{C}$ *analitička u prstenu* $K = \{z \in C : r < |z - z_0| < R\} \neq \emptyset$, *onda je*

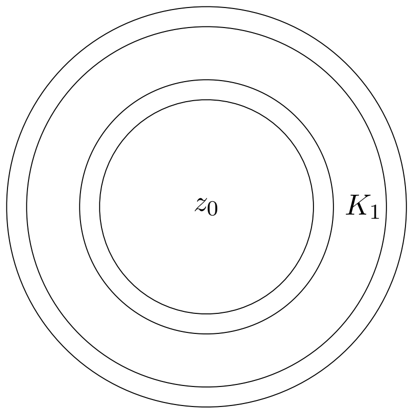
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ z \in K,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

pri čemu je γ *kružnica* $|\eta - z_0| = \rho, r < \rho < R.$

Dokaz. Neka je $z \in K$ fiksirana tačka iz prstena K i r_1 i R_1 pozitivni brojevi, takvi da je $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. Na osnovu Cauchyeve integralne formule slijedi da je tada



Slika 3.4: Laurentova teorema i četiri kruga

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

gdje je

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} d\eta,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = r_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = r_1} \frac{f(\eta)}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} d\eta.$$

Ako je $|\eta - z_0| = R_1$, tada je $\left|\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right| < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^k.$$

Slično, ako je $|\eta - z_0| = r_1$, slijedi da je $\left|\frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{\rho} < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta - z_0}{z - z_0}\right)^k.$$

Na osnovu Weierstrassovog kriterijuma o ravnomjernoj konvergenciji slijedi da u oba slučaja prethodni geometrijski redovi konvergiraju ravnomjerno po η, pa se mogu integraliti član po član. Integraljenjem dobijamo

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}\,d\eta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\left[\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^k\right]d\eta = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}\,d\eta, k=0,1,\ldots.
$$

Takodje je

$$
\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\frac{f(\eta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\eta-z_0}{z-z_0}}\,d\eta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\left[\frac{f(\eta)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta-z_0}{z-z_0}\right)^k\right]d\eta\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}b_l\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^l = \sum_{k=-1}^{k=-\infty}c_k(z-z_0)^k,
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
b_l = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}f(\eta)(\eta-z_0)^l d\eta, l=0,1,\ldots,
$$

$$
c_k = b_{-k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}d\eta, k=0,1,\ldots.
$$

Na kraju, primijetimo da u formulama za koeficijente c_k, prema Cauchyevoj formuli za višestruko povezane oblasti, integraciju po kružnicama $|\eta-z_0| = r_1$ i $|\eta-z_0| = R_1$ možemo zamijeniti integracijom po proizvoljnoj kružnici $\gamma = \{\eta : |\eta-z_0| = \rho\}$, gdje je $r < \rho < R$ (i čak po proizvoljnoj konturi koja obuhvata kružnicu $|\eta-z_0| = r$ i leži unutar kružnice $|\eta-z_0| = R$). Odavde slijedi tvrdjenje teoreme. $\square$

Red
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, z \in K,$$
gdje je
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}\,d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
naziva se Laurentovim redom funkcije f. Takodje se govori da je formulom iz tvrdjenja teoreme dato razlaganje funkcije f u Laurentov red. Pri tome se za red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ kaže da je *pravilni dio* a za red $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ da je *glavni dio* Laurentovog reda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

U sljedećoj teoremi dokazuje se jedinstvenost razlaganja analitičke funkcije u Laurentov reda

Teorema 5.2. *Ako je funkcija $f : K \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prstenu $K = \{z \in C : r < |z-z_0| < R\}$, onda se ona u Laurentov red razlaže na jedinstven način.*

Dokaz. Neka je
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, z \in K.$$
Množeći gornju jednakost sa $(z-z_0)^{-n-1}$ i integraleći duž kružnice $|z-z_0| = \rho$, $r < \rho < R$, dobijamo da je $a_n = c_n$ za svaki cijeli broj n. □

Primjer 5.3. Razvićemo funkciju
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$
(koja je analitička na skupu $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$) u Laurentov red po stepenima $(z-1)$ na dva različita načina, odnosno u dva različita prstena. U prstenu $\{z : 0 < |z-1| < 1\}$ važi
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n \\ &= \sum_{n=-2}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0 < |z-1| < 1. \end{aligned}$$

S druge strane, u oblasti $\{z : |z-1| > 1\}$, Laurentov razvoj funkcije f ima oblik

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^{n+1}(z-1)^n,\ |z-1|>1. \end{aligned}$$

Napomenimo da činjenica da postoje različiti razvoji funkcije f u Laurentv red po stepenima $z-1$ ne protivrječi teoremi o jedinstvenosti Laurentovog reda, jer se tada (i u ovom primjeru) radi o razvojima u različitim oblastima.

Naravno, funkciju možemo razviti i u prstenu $\{z : 0 < |z| < 1\}$ po stepenima z. Naime, tada je

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n,\ 0<|z|<1.$$

Primjer 5.4. Razmotrimo dva specijalna slučaja.

(a) Ako je $R=+\infty$ i funkcija f analitička i ograničena u oblasti $\{z : |z-z_0| > r$, tada za svako $n>0$ i svako $\rho > r$, važi

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

odakle, s obzirom da $\rho > r$ može biti proizvolno veliko, slijedi da je $c_n = 0$ za $n>0$, odnosno, tada je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0| > r.$$

(b) Ako je $r=0$ i funkcija f analitička i ograničena u oblasti $\{z : 0 < |z-z_0| < R$, tada za svako $n<0$ i svako $\rho < R$ važi

$$|c_n| = \frac{1}{2p}\left|\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \int_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \leq \frac{M}{\rho^{-n}} \to 0$$

kada $\rho \to 0$.

Odavde slijedi da je $c_n = 0$ za $n < 0$, pa je Laurentov red funkcije f u prstenu $0 < |z - z_0| < R$ sadrži sao pravilni dio

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < R.$$

Primijetmo da se u prethodne dvije teoreme (i u prethodnim primjerima) dopušta da je $r = 0$ i (ili) $R = +\infty$. U slučaju $r = 0$, razlaganje funkcije u Laurentov red može biti korišćeno za izučavanje ponašanja funkcije f kada $z \to z_0$.

Definicija 5.5. *Tačka z_0 je izolovani singularitet funkcije f ako postoji pozitivan broj r, takav da je funkcija f analitička u skupu $\{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$ a nije analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.*

u

Ako je tačka z_0 izolovani singularitet funkcije f, onda se funkcija f može razložiti u Laurentov red:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n, z \in K = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Zavisno od toga koliko članova sadrži glavni dio Laurentovog reda funkcije f, singulariteti se klasifikuju na sljedeći način:

(a) Ako je $c_{-n} = 0$ za svako $n \geq 0$, onda se Laurentov red svodi na njegov pravilni dio i tada se kaže da je z_0 *otklonjiv (prividan) izolovani singularitet* funkcije f.

(b) Ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f sadrži konačno mnogo članova, tada se kaže da je z_0 pol funkcije f. Pri tome, ako je m prirodan broj takav da je $c_{-m} \neq 0$ i $c_{-k} = 0$ za svako $k > m$, tada se kaže da je z_0 pol reda m funkcije f. Za pol reda $m = 1$ funkcije f kaže se da je *prosti pol* funkcije f..

(c) Ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f sadrži beskonačno mnogo članova tada se kaže da je z_0 *esencijalni singularitet funkcije f*.

U sljedećoj teoremi daje se nekoliko kriterijuma pomoću kojih se može utvrditi da li je z_0 otklonjivi izolovani singualritet funkcije f.

Teorema 5.6. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Tačka z_0 je otklonjiv izolovani singularitet funkcije f;

(b) Postoje $c_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je funkcija

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} f(z), & 0 \leq |z - z_0| < r \\ c_0, & z = z_0 \end{cases}$$

analitička u $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.

(c) Postoji $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

(d) Postoji $r > 0$, takvo da je funkcija f ogranična na $K(z_0, r)\setminus\{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$.

Dokaz. Ako je z_0 otklonjiv singularitet onda je

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : 0 < |z-z_0| < r\}.$$

Ako funkciju $\overline{f}$ definišemo stepenim redom

$$\overline{f}(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : |z-z_0| < r\}.$$

tada je $\overline{f}$ analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.
Dakle, $(a) \Longrightarrow (b)$.

Iz (b) slijedi da je $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \bar{f}(z) = c_0$, što znači da $(b) \Longrightarrow (c)$.

Dalje, ako je ispunjen uslov (c) i ako je $\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$, onda postoji krug $K(z_0, r)$ takav da je $|f(z) - c_0| < 1$ za svako $z \in K(z_0, r)$. Odavde slijedi da je $|f(z)| \leq |c_0| + 1$, odnosno $(c) \Longrightarrow (d)$.

Na kraju, pretpostavimo da je ispunjen uslov (d). Tada je, za dovoljno malo r, funkcija f ograničena na $\{z \in C : |z - z_0| \leq r\}$, pa za za svako $n \in N$ i kružnicu $\gamma = \{z \in C : 0 < |z - z_0| = r\}$ važi:

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-n+}} d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{-n+1}} |dz| \\ &\leq M \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n \to 0 \text{ kada } n \to \infty. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $c_{-n} = 0$, pa je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f. To znači da $(d) \Longrightarrow (c)$. Ukupno, imamo da $(a) \Leftrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow a)$, čime je teorema dokazana. $\square$

Računanjem granične vrijednosti $\lim_{z\to z_0} f(z)$ može se utvrditi i da li je izolovani singularitet z_0 pol funkcije f.

Teorema 5.7. *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je pol te funkcije ako i samo ako je* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da je z_0 pol reda $m \geq 1$ funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_m(z-z_0)^{-m} + \sum_{i=-(m-1)}^{\infty} c_i(z-z_0)^i, z \in \{z \in C : 0 < |z-z_0| < r\}.$$

Odavde slijedi da je z_0 otklonjiv singularitet funkcije

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j-m}(z-z_0)^j, z \in \{z \in C : 0 < |z-z_0| < r\},$$

i

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m = c_m \neq 0,$$

pa je $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Obrnuto, ako je $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, tada postoji $r > 0$, takvo da je $f(z) \neq 0$ za $0 < |z - z_0| < r$. Posmatrajmo funkciju

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & 0 < |z - z_0| < r \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Pošto je $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = 0$, to je funkcija f_1 analitička u krugu $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, pri čemu je z_0 jedinstvena nula funkcije f_1 u tom krugu. Zbog toga postoji prirodan broj m, takav da je $f_1(z) = (z - z_0)^m g(z)$, gdje je funkcija g analitička u krugu $K(z_0, r)$, $g(z_0) \neq 0$. Slijedi da je i funkcija $g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$ analitička u $K(z_0, r)$, pa je

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^{-m} \frac{1}{g(z)} \\ &= (z-z_0)^m \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z-z_0)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z-z_0)^{i-m} \\ &= \sum_{j=-m}^{\infty} c_j(z-z_0)^j,\ 0 < |z-z_0| < r,\ c_{-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

što znači da je z_0 pol reda m funkcije f. □

Teorema 5.8. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Tačka z_0 je pol reda m.

(b) Za svako $k < m$ tačka z_0 je pol funkcije $h_k(z) = (z - z_0)^k f(z)$ i otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.

(c) $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = \beta$, *gdje je $\beta \neq 0$ i $\beta \neq \infty$.*

(d) Tačka z_0 je nula višestrukosti m funkcije

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Dokaz. Neka je ispunjen uslova (a). Tada je

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_1(z-z_0)^{-1}+c_0+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots, c_{-m} \neq 0,$$

$z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$. Tada je za $k \leq m$

$$\begin{aligned} h_k(z) &= (z - z_0)^k f(z) \\ &= c_{-m}(z - z_0)^{-m+k} + \cdots + c_0(z - z_0)^k + \cdots + c_n(z - z_0)^{n+k} + \cdots, \\ &\quad z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je za tačka z_0 pol reda $m-k$ funkcije h_k, dok je za $k = m$ tačka z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = h_m(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Dakle, $(a) \Longrightarrow (b)$.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (b). Tada je z_0 pol funkcije $h_{m-1}(z) = (z - z_0)^{m-1} f(z)$, pa postoji $r > 0$, takvo da je za $0 < |z - z_0| < r$,

$$h_{m-1}(z) = b_{-l}(z - z_0)^{-l} + \cdots + b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

gdje je $b_{-l} \neq 0$. Pošto je z_0 otklonjiv singularitet funkcije

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)h_{m-1}(z),$$

imamo da je

$$g(z) = b_{-l}(z-z_0)^{-l+1}+\cdots+b_{-1}+b_0(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^{n+1}+\cdots.$$

Laurentov red funkcije g sastoji se samo od pravilnog dijela, pa iz uslova $b_{-l} \neq 0$ slijedi da je $l = 1$, $b_{-1} \neq 0$ i

$$g(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} b_j (z - z_0)^{j+1}.$$

Odavde dalje slijedi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots ,$$

gdje je $c_{-m} = b_{-1} \neq 0$, pa je z_0 pol reda m funkcije f. Dakle, $(b) \Longrightarrow (a)$, odnosno $(a) \Longleftrightarrow (b)$.

Ponovo pretpostavimo da je ispunjen uslov (a), odnosno da je z_0 pol reda m funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots , \ 0 < |z - z_0| < r,$$

gdje je $c_{-m} \neq 0$. Odavde slijedi da je

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta,$$

gdje je $\beta = c_{-m} \neq 0$ i $\beta \neq \infty$. To znači da $(a) \Longrightarrow (c)$.

Obrnuto, ako postoji $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta \neq 0$, tada je z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, pa postoji realan broj $r > 0$, takav da je

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - z_0)^i, \ b_0 \neq 0, \ 0 < |z - z_0| < r.$$

Odavde slijedi da je

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \ 0 < |z - z_0| < r,$$

gdje je $c_{-m} = b_0 \neq 0$, što znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Uzimajući u obzir prethodna razmatranja, zaključujemo da je $(a) \Longleftrightarrow (c)$.

Dokažimo još da $(c) \Longrightarrow (d)$. Pretpostavimo da je izpunjen uslov (c) i posmatrajmo funkciju $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, koja je, za neko $r > 0$, analitička u prstenu $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$. Postavimo $g(z_0) := \lim_{z \to z_0} g(z)$.

Tada je, prema uslovu (c), $g(z_0) \neq 0$. Odavde, zbog neprekidnosti funkcije g u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$, slijedi da postoji $r_1 > 0$, takvo da je $g(z) \neq 0$ za $|z - z_0| < r_1$. Funkcija $f_1(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m h(z)$, gdje je $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ analitička i različita od nule u krugu $|z - z_0| < r_1$. To znači da je z_0 nula reda m funkcije f_1, odnosno da $(c) \Longrightarrow (d)$.

Pretpostavimo da je izolovani singularitet z_0 funkcije f nula reda m funkcije f_1. Tada je $f_1(z) = (z-z_0)^m h(z)$, pri čemu je $h(z_0) \neq 0$. Funkcija $h(z) = f_1(z)(z - z_0)^{-m}$ je analitička (pa dakle i neprekidna) u nekom krugu $\{z : |z - z_0| < r_1\}$, a odatle slijedi da je $h(z) \neq 0$ u nekom krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$. Odavde sijedi da je i funkcija $g(z) = \frac{1}{h(z)}$ analitička u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$ i da je pri tome $g(z_0) \neq 0$. Tada je

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - z_0)^i, \ b_0 \neq 0,$$

i

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \text{ pri čemu je } c_{-m} = b_0 \neq 0.$$

To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Dokazali smo, dakle, da $(d) \Longrightarrow (a)$.

Uzimajući u obzir i ranije dokaze, imamo da je $(a) \Longleftrightarrow (b)$, $(a) \Longleftrightarrow (c)$, $(c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$, čime je teorema dokazana u potpunosti. □

Ostaje da primijetimo da se izolovani singularitet z_0 funkcije f prepoznaje kao esencijalni singularitet tako što se negiraju dvije preostale mogućnosti: da je to otklonjiv singularitet i da je pol. To znači da je izolovani singularitet z_0 funkcije $f(z)$ esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako (u $\overline{\mathbb{C}}$) ne postoji $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Odavde slijedi sljedeće tvrdjenje:

Teorema 5.9. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f i ako je $f(z) \neq 0$ u nekoj okolini tačke z_0, tada je z_0 esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako je z_0 esencijalni singularitet funkcije $\frac{1}{f}$.*

Primjer 5.10. Neka je $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Ako je $z_n = \frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) = e^n \to +\infty$ kada $n \to \infty$. S druge strane, ako je $z_n = -\frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Ako je $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, tada postoji $a \in \mathbb{C}$, takvo da je $e^a = w$. Ako je $z_n = \frac{1}{a+2\pi n i}$, tada $z_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i $f(z_n) = w$. Dakle, tačka $z_0 = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Pri tome, za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n), takav da $z_n \to 0$ a $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

Teorema 5.11 (Casorati-Weirestrassova). *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n) koji konvergira ka z_0, takav da $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Jedan dio tvrdjenja je direktna posljedica teorema o otklonjivom singularitetu i polu funkcije: ako za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n), takav da $z_n \to z_0$ i $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$, onda je z_0 esencijalni singularitet funkcije f.

Pretpostavimo da je z_0 esencijalni singularitet funkcije f. Tada je

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\},$$

pri čemu je beskonačno mnogo koeficijenata c_n sa negativnim indeksom n različiti od nule. U toku dokaza teoreme o Laurentovom redu dokazano je da tada red $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n (= f_1(z))$ konvergira za svako $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Slijedi da je funkcija $g(\eta) = c_{-1}\eta + c_{-2}\eta^2 + \cdots + c_{-n}\eta^n + \cdots$ analitička u cijeloj kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$. Pošto ta funkcija nije konstantna, ona je, prema Liouvillovoj teoremi, neograničena. Slijedi da postoji niz (η_n), $\eta_n \to \infty$, takav da $g(\eta_n) \to \infty$. Tada niz $z_n = z_0 + \frac{1}{\eta_n} \to z_0$, a $f_1(z_n) \to \infty$, $f_2(z_n) \to 0$, pa $f(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$.

Pretpostavimo sada da je $w \in \mathbb{C}$. Ako je z_0 tačka nagomilavanja skupa $A = \mathrm{Null}\ (h)$ nula funkcije $h(z) = f(z) - w$, onda postoji niz (z_n) tačaka skupa A, takav da $z_n \to z_0$, a tada $f(z_n) \to w$. Ako z_0 nije tačka nagomilavanja skupa A, onda postoji krug $K(z_0, \varepsilon)$ koji ne sadrži ni jednu nulu funkcije h. Tada je funkcija $\varphi = \frac{1}{h}$ analitička u skupu $K(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Tačka z_0 je esencijalni singularitet i funkcije h i funkcije φ. Pri tome postoji niz (z_n) takav da $z_n \to z_0$ i $\varphi(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$. Tada $h(z_n) \to w$, odnosno, $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

$\square$

Iz Casorati-Weirestrassove teoreme slijedi da ako se posmatraju svi nizovi (z_n) koji konvergiraju ka esencijalnom singularitetu z_0 funkcije f, onda je skup svih tačaka nagomilavanja odgovarajućih nizova $(f(z_n))$ proširena kompleksna ravan. To je bitno drugačija situacija od situacija kada je z_0 pol (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ tačka ∞), ili kada je z_0 otklonjiv singularitet (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ neka tačka iz $\mathbb{C}$). Dakle, ponašanje funkcije f u okolini izolovanog singulariteta zavisi od glavnog dijela Laurentovog reda u okolini tog singulariteta

Bez dokaza dajemo sljedeću teoremu, opštiju od Casorati-Weirestrassove teoreme.

Teorema 5.12 (Picardova teorema)**.** *Ako je tačka $z_0 \in D$ esencijalni singularitet funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, onda za svaku okolinu $O(z_0) \subseteq D$ tačke z_0 i svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$, sa izuzetkom najviše jedne vrijednosti, postoji beskonačno mnogo tačaka $z \in O(z_0)$, takvih da je $f(z) = w$.*

Primjer 5.13. Dokažimo da je tvrdjenje Picardove teoreme tačno za funkciju $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Za $w \neq 0$ i $r > 0$ jednačina $e^{1/\eta} = w$, $|\eta| < r$, je ekvivalentna sa jednačinom $e^z = w$, za $|z| > 1/r$. Neka je $z = x + iy$ i $w = u + iv$. Tada je $|w| = e^x$ i $e^{iv} = e^{iy}$. Slijedi da su rješenja polazne jednačine $z = \log|w| + i(v + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Razmotrimo posebno slučaj kada je izolovani singularitet funkcije f tačka $z_0 = \infty$. Tada postoji $r > 0$, takvo da je na skupu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ funkcija f analitička. Slijedi da je funkcija $\varphi(\eta) = f(1/\eta)$ analitička na skupu $\{\eta : 0 < |\eta| < \frac{1}{r}\}$, pa je $\eta = 0$ izolovani singularitet funkcije φ. To znači da u okolini tačke 0 funkciju φ možemo razložiti u Laurentov red

$$\varphi(\eta) = f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \eta^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \eta^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k,$$

odakle slijedi da je

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Kažemo da je gornjom formulom dato razlaganje funkcije f u Laurentov red u okolini tačke ∞. Pri tome se red $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k$ naziva glavnim dijelom a red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ pravilnim dijelom ovog Laurentovog reda. Klasifikacija izolovanog singulariteta $z_0 = \infty$ funkcije f vrši se na uobičajen način: ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f u okolini beskonačno udaljene tačke sadrži beskonačno mnogo članova, onda je $z_0 = \infty$ esencijalni singularitet funkcije f; ako je $c_{-m} \neq 0$ i $c_{-k} = 0$ za svako $k > m$, onda je $z_0 = \infty$ pol reda m funkcije f; ako Laurentov red sadrži samo pravilni dio onda je $z_0 = \infty$ otklonjivi singularitet funkcije f. Ukupno, beskonačno udaljena tačka je esencijani (pol reda m, otklonjiv singularitert) izolovani singularitet funkcije f ako i samo ako je tačka $\eta = 0$ esencijalni singularitet (pol reda m, otklonjiv singularitet) funkcije $\varphi(\eta) = f\left(1/\eta\right)$.

Primjer 5.14. (a) Beskonačno udaljena tačka je izolovani singularitet funkcije $f(z) = z^{-1}\sin z$. Da bismo utvrdili prirodu tog singulariteta dovoljno je posmatrati funkciju $\varphi(\eta) = f\left(1/\eta\right) = \eta \sin 1/\eta$, koja u tački $\eta_0 = 0$ ima otklonjiv singularitet. Dakle, $z_0 = \infty$ je otklonjiv singularitet funkcije $f(z) = z^{-1}\sin z$.

(b) Ako je $f(z) = e^z$, tada je $\varphi(\eta) = f(1/\eta) = e^{1/\eta}$, i pošto je $\eta_0 = 0$ esencijalni singularitet funkcije φ, to je $z_0 = \infty$ esencijalni singularitet funkcije f.

(c) Beskonačno udaljena tačka je pol reda dva funkcije $f(z) = (z - 1)^3/z$.

Definicija 5.15. *Ako je Ω oblast u $\mathbb{C}$ ili u $\overline{\mathbb{C}}$ a funkcija f analitička u $\Omega \setminus E$, gdje je $E \subseteq \Omega$ skup polova funkcije f, tada se kaže da je f meromorfna na Ω.*

Za funkciju koja je meromorfna na $\mathbb{C}$ kratko kažemo da je meromorfna.

Primjer 5.16. (a) Funkcija $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, gdje su P_n i Q_m polinomi stepena n odnosno m, je meromorfna. Njeni polovi su su nule polinoma Q_m. Funkcija f nema drugih izolovanih singulariteta.

(b) Jedini izolovani singulariteti funkcije

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

su $z_k = 2k\pi i, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ i to su polovi, pa je f meromorfna funkcija

Primjedba 5.17. Primijetimo da ako je f meromorfna funkcija, tada je skup E njenih polova najvše prebrojiv. Ako je f meromorfna na $\overline{\mathbb{C}}$, tada je skup njenih polova konačan. U protivnom, ako bi skup E bio beskonačan, tada bi u $\mathbb{C}$, postojala tačka nagomilavanja skupa E. To bi bila singularna tačka funkcije f, ali ne bi bila izolovani singularitet.

Teorema 5.18. *Ako je f meromorfna funkcija, takva da je beskonačn udaljena tačka njen otklonjiv singularitet ili pol, tada je f racionalna funkcija.*

Dokaz. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_k$ polovi reda $m_1, m_2, \ldots, m_k$, a $z_0 = \infty$ pol reda $l \geq 0$ funkcije f. Posmatrajmo proizvod

$$g(z) = z^{-l} f(z) \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j}.$$

Slijedi (v. teoremu 3.5.6) da za svako $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, postoji $\lim_{z \to z_j} g(z)$. Istovremeno, postoji $\lim_{z \to \infty} g(z)$. Dakle, svi singulariteti funkcije g su otklonjivi, pa je $g(z)$ konstanta. Odavde dalje slijedi da je

$$f(z) = \frac{g(z) z^l}{\prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j}}$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadaci

1. Razviti u Laurentov red funkcije po stepenima $z - a$ u oblastia D ako je

   a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)},\ a = 0, D = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$,

   b) $f(z) = \frac{z^3}{(z-2)(z+1)},\ a = -1, D = \{z \in C : 0 < |z+1| < 3\}$.

2. Ispitati karekter singulariteta funkcije f ako je

   a) $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 1}$,

   b) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$,

   c) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$,

   U sljedećim zadacima date funkcije razložiti u Laurentov red na datim prstenima ili u (šupljim) okolinama datih tačaka. Ako se traži razvoj funkcije f u okolini tačke $z = a$ onda treba naći razvoj po stepenima $z - a$. Ako se pak traži razvoj funkcije f u tački $z = \infty$ onda se podrazumijeva da treba naći razvoj po stepenima z ili, što je isto, po stepenima $1/z$.

3. $w = \dfrac{1}{z-2}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

4. $w = \dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, k prirodan broj); (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

5. $w = \dfrac{1}{z-a}$; $z = b, b \neq a$.

6. $w = \dfrac{1}{z(1-z)}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = \infty$.

7. $w = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0 < |a| < |b|)$;
   (i) $z = 0$, (ii) $z = a$, (iii) $z = \infty$, (iv) $|a| < |z| < |b|$.

8. $w = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$; (i) $z = \infty$, (ii) $1 < |z| < 2$.

9. $w = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$; (i) $z = i$, (ii) $z = \infty$.

10. $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}\, w(+\infty) = +\infty)$; $z = \infty$.

11. $w = \dfrac{z}{1-z^8} + z^2 e^{\frac{1}{z}}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

12. $w = e^{\frac{1}{z-i}} \dfrac{\sin \frac{1}{z-i}}{(z-i)^2}$; $z = i$.

13. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$.

14. $w = e^{z+\frac{1}{z}} + \sin z \sin \dfrac{1}{z}$; $0 < |z| < \infty$.

15. $w = \sin \dfrac{z}{1-z}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$
    (u poslednjem slučaju ograničiti se na prva tri člana reda).

16. $w = \operatorname{ctg} z$; $z = 0$.

17. Dokazati da ako cijela funkcija u beskonačno udaljenoj tački ima pol reda m, tada je f polinom stepena m.

18. Konstruisati funkciju f koja je analitička na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, pri čemu su $0, 1$ i ∞ esencijalni izolovani singulariteti.

19. Neka je $f(z) = e^{z-1/z}$, $0 < |z| < \infty$.

   (a) Odrediti koeficijente c_n u razvoju funkcije f u Laurentov red u prstenu $\{z : 0 < |z| < \infty$.

   (b) Dokazati jednakost
   $$\int_{|z|=1} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta = i \int_0^{2\pi} \cos(nt - 2\sin t) dt.$$

   (c) Izvesti formulu
   $$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - 2\sin t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}.$$

20. Neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ pol reda m funkcije f i pol reda n funkcije g. Šta se može o o tački z_0 ka izolovanom singularitetu funkcija $F = f + g$?

21. Neka je f cijela funkcija za koju postoji $M > 0$, takvo da je $|f(z)| \leq M|\sin z|$, za svako $z \in \mathbb{C}$. Dokazati da postoji $K \in \mathbb{C}$, takvo da je $f(z) = K \sin z$.

6 Rezidum. Primjena na izračunavanje integrala kompleksnih funkcija

Definicija 6.1. *Rezidum u tački $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$, analitičke na skupu $D \setminus \{z_0\}$, je kompleksan broj koji se označava sa* $\operatorname{Res}(f; z_0)$ *i definiše formulom*
$$\operatorname{Res}(f; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z)\, ddz,$$
gdje je γ dio po dio glatka zatvorena kriva orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu, koja ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, pri čemu $z_0 \in \Omega$.

Iz definicije reziduma i Cauchyeve teoreme slijedi da ako je funkcija f analitička u tački z_0, onda je $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$. Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada se u nekom prstenu $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ funkcija f može razložiti u Laurentov red i $\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}$, gdje je c_{-1} koeficijenat uz $(z - z_0)^{-1}$. Odavde slijedi da ako je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f, onda je $\mathrm{Res}(f; z_0) = 0$.

Ako je z_0 pol reda m funkcije f, onda je

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \cdots, 0 < |z - z_0| < r.$$

Funkcija

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots,$$

je analitička u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$. Diferencirajući gornji red $(m - 1)$ puta dobijamo

$$g^{(m-1)}(z) = (m-1)!c_{-1} + (z - z_0)g_1 z), g_1(z_0) \neq 0.$$

Odavde slijedi da je

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)].$$

Specijalno, ako je z_0 prost pol, onda je

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ako je $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje su funkcije φ i ψ analitičke u $z_0, \varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$, onda je z_0 pol prvog reda funkcije f, pa je

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Pretpostavimo da je funkcija f analitička u skupu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, gdje je $r > 0$. Rezidum funkcije f u tački $z_0 = \infty$ definiše se formulom

$$\operatorname{Res}(f; \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz,$$

gdje je $\gamma = \{z : |z| = \rho\}$, kružnica poluprečnika $\rho > r$. Ako se funkcija f razloži u Laurentov red u okolini tačke $z_0 = \infty$, onda je njen rezidum u tački z_0 jednak koeficijentu uz $\frac{1}{z}$, sa promijenjenim znakom. Primijetimo da se taj koeficijent nalazi u pravilnom dijelu Laurentovog reda.

Iz definicije reziduma funkcije u datoj tački slijedi da, pod izvesnim uslovima, važi jednakost

$$2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f; z_0) = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Odavde slijedi da se integrali kompleksnih funkcija po zatvorenim krivim linijama mogu računati pomoću reziduma. U vezi sa ovom primjedbom važi sljedeće tvrdjenje.

Teorema 6.2 (Cauchyeva teorema o rezidumima)**.** *Neka je D oblast u BbbC i $A = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq D$. Ako je funkcija f analitička na skupu $D \setminus A$, onda za svaku konturu $\gamma \subseteq D$ koja ograničava oblast $\Omega \supseteq A, \Omega \subseteq D$, važi*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Dokaz. Neka su $\gamma_1,\ldots,\gamma_n (\subseteq \Omega)$ konture opisane oko tačaka $z_1,\ldots, z_n$, takve da njima ograničene zatvorene oblasti $\Omega_1 \subseteq \Omega, \ldots, \Omega_n \subseteq \Omega$ nemaju zajedničkih tačaka. Primjenjujući Cauchyevu teoremu za višestruko povezane oblasti, dobijamo

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

□

Primjedba 6.3. Pretpostavimo da su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ konture u C koje ograničavaju oblasti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, pri čemu je za $i \neq j$ presjek $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$ prazan skup. Neka je dalje γ_0 kontura koja obuhvata konture $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ i ograničava oblast Ω_0. Sa D označimo višestruko povezanu oblast $\Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n)$ a sa ∂D njenu granicu, koja se sastoji od kontura $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, orijentisanu tako da kada se ona (granica ∂D) obilazi, oblast D ostaje sa lijeve strane. Ako je $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subseteq D$ konačan skup izolovanih singulariteta funkcije f, pri čemu $z_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i ako je funkcija f analitička na $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$, tada, ponovo primjenjujući Cauchyevu teoremu, dobijamo da je

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in A} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Ako skup izolovanih singulariteta funkcije f sadrži i beskonačno udaljenu tačku, onda važi sljedeće tvrdjenje.

Teorema 6.4. *Ako je funkcija f analitička na skupu $\mathbb{C} \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$ konačan skup, onda je*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

Dokaz. Neka je γ krug koji obuhvata tačke $z_1, \ldots, z_n$, orijentisan suprotno kretanjui kazaljke na satu. Tada je, prema prethodnoj teoremi,

$$\int_{\gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

S druge strane, na osnovu definicije reziduma funkcije f u tački ∞, važi jednakost

$$2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty) = -\int_{\gamma^+} f(z)\,dz.$$

Iz ovih formula slijedi tvrdjenje teoreme. □

U sljedećem primjeru pokazuje se kako se integrali po konturama mogu računati pomoću reziduma.

Primjer 6.5. Izračunaćemo $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m}\,dz$, gdje je γ: (a) polukrug $\{z : |z| = r, -r \leq \text{Re } z \leq r, \text{Im } z \geq 0\}$, (b) krug $\{z : |z| = r\}$, $(r > 0, r \neq 1)$, orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu.

Izolovani singulariteti funkcije $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^m}$ su tačke $z_1 = i$ i $z_2 = -i$ i to su polovi reda m. Ako je $r < 1$, onda je i u slučaju (a) i u slučaju (b) funkcija f analitička u oblasti ograničenoj krivom γ, pa je u oba slučaja $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Ako je $r > 1$, onda je u slučaju (a) potrebno izračunati reziduum funkcije f u tački $z_1 = i$ a u slučaju (b) reziduum iste funkcije u tačkama $z_1 = i$ i $z_2 = -i$. Imamo da je

$$\text{Res}(f; i) = \lim_{z\to i}((z-i)^m \frac{1}{(1+z^2)^m})^{(m-1)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(i+z)^m})^{(m-1)}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(-1)^{m-1}m(m+1)\cdots(2m-2)}{(i+z)^{2m-1}} = -i\frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Slijedi da je u slučaju (a)

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m} = 2\pi i\,\text{Res}(f; i) = 2\pi\frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Zadaci

(a) Izračunati

a) $\text{Res}(ze^{\frac{1}{z-1}}; 1)$; b) $\text{Res}(\frac{1}{\sin^2 \pi z}; -1)$;

c) $\text{Res}(\frac{1-\cos z}{z^n}; 0)$ $(n \in \mathbb{N})$; d) $\text{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z}}z^n}{2z}; \infty\right)$

e) $\text{Res}\left(\frac{z^2}{(z+1)(z^2+4)}; -2i\right)$; *f)* $\text{Res}\left(\frac{e^{\pi iz}}{(z(2z-1))^3}; 1/2\right)$;

g) $\text{Res}\left(\frac{e^z}{\sin^2 z}; -\pi\right)$.

(b) Neka je funkcija f regularna u beskonačno udaljenoj tački. Dokazati da je $\text{Res}\, f(z); \infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = -\varphi'(0)$, gdje je $\varphi(z) = f(1/z)$.

(c) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^5(z^{20}-3)}$, $D = \{z \in C : |z| < 3\}$;

(d) $\displaystyle\int_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz$, $D = \{z \in C : |z| > 2\}$;

(e) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z}{z-1} e^{-z^2} dz,\ D = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}.$

(f) $\displaystyle\int_l \frac{1}{z} e^{\frac{1}{1-z}} dz$, gdje je l zatvorena dio po dio glatka kriva.

22. Odrediti rezidiume sljedećih funkcija u svim izolovanim singularitetima i u tački $z = \infty$ i provjeriti da li su te funkcije meromorfne funkcije u cijeloj kompleksnoj ravni ili pak u proširenoj kompleksnoj ravni:

1. $w = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 2. $w = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. 3. $w = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

4. $w = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. 5. $w = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. 6. $w = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

7. $w = \dfrac{1}{\sin z}$. 8. $w = \operatorname{ctg}^3 z$. 9. $w = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$.

10. $w = e^{z+\frac{1}{z}}$. 11. $w = \sin z \sin \dfrac{1}{z}$. 12. $w = \cos \dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

13. $w = \dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h \neq 0)$. 14. $w = \dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

15. $w = \dfrac{\tan z}{z^n}$ (n-prirodni broj). 16. $w = \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

23. Odrediti rezidium funkcije

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z} - 1}$$

u tački $z = 1$ ($\sqrt{1} = 1$).

24. Funkcije $w = f(z)$ u tački $z = 0$ ima razvoj $w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Odrediti reziduum funkcije $g(z) = [f(z)]^2$ u tački $z_0 = 0$.

25. Neka su funkcije f i g analitičke u krugu $K(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ i neka je a nula funkcije f višestrukosti m i nula funkcije g višestrukosti $m+1$. Dokazati jednakost

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; a\right) = (m+1)\frac{f^m(a)}{g^{m+1}(a)}.$$

26. Neka je funkcija f analitička u prosto povezanoj oblasti $D \supseteq \gamma(a,r)$, gdje je $\gamma(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$, pri čemu je $f(z) \neq 0$ na γ. Izračunati
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f'(z)dz}{f(z)z^m}.$$

7 Primjena reziduuma za izračunavanje integrala

U ovom dijelu pokazaćemo se kako se Cauchyeve teoreme o reziduumima mogu koristiti za izračunavanje odredjenih integrala realnih funkcija.

1. Posmatraćemo integrale tipa
$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$
gdje je R racionalna funkcija. Gornji integral se može računati uvodeći novu promjenljivu $z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tada je $\cos\varphi = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \sin\varphi = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), dz = izd\varphi$. Slijedi da je
$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}dz \\ &= \int_{|z|=1} R_1(z)dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(R_1; z_k), \end{aligned}$$
pri čemu se sabiraju rezidumi funkcije R_1 u izolovanim singularitetima te funkcije, koji se nalaza u krugu $|z| < 1$. Primijetimo da je funkcija R_1 racionalna, pa su njeni izolovani singulariteti ili otklonjivi ili polovi. To znači da se za izračunavanje reziduma mogu primijeniti ranije opisani postupci.

Primjer 7.1. Izračunaćemo integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, gdje je $a > b > 0$. Iz $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ postavljajući $z = e^{i\varphi}$, dobijamo: $\cos\varphi = \dfrac{1+z^2}{2z}$ i

$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. Zato je

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} &= \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(1+2a/bz+z^2)^2} \\ &= \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2},\end{aligned}$$

gdje je $z_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$ i $z_2 = -\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$. Lako se pokazuje da je $|z_1| < 1$ i $|z_2| > 1$, pa je

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} &= 2\pi i \frac{4}{ib^2} \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \\ &= \frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)'_{z=z_1} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Vratimo se opštijim pitanjima. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na $\mathrm{Im}\ z \geq 0$ i analitička na skupu $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\} \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_k\}$ skup izolovanih singulariteta funkcije f koji leže u gornjoj poluravni $\mathrm{Im}\ z > 0$. Pretpostavimo dalje da postoje $M > 0$, $r > 0$ i $\delta > 0$, takvi da za $|z| > r$, važi: $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Pokažimo kako se tada može izračunati integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Ako polukrug $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z = 0, |\mathrm{Re}\ z| \leq r\}$ obuhvata sve tačke $z_1, z_2, \ldots, z_k$ i ako je $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, onda je

$$\int_{K_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_i).$$

Pri tome je

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_r} |f(z)|ds \leq \int_{\gamma_r} \frac{M}{|z|^{1+\delta}} ds = \frac{2\pi M}{r^\delta}.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Zbog toga je

$$\lim_{r\to 0}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i),$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_i).$$

Primjer 7.2. Da bismo izračunali integral

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=2I_1.$$

posmatraćemo funkciju $f(z)=\frac{1}{1+z^{2n}}$, čiji su jedini izolovani singulariteti prosti polovi (rješenja jednačine $z^{2n}=-1$): $z_k=e^{(2k+1)\pi i/(2n)}, k=0,1,\ldots,2n-1$. Kontura Γ_R koja se sastoji od tri dijela: $\gamma_{1R}=\{z:\mathrm{Im}\ z=0, 0\le \mathrm{Re}\ z\le R\}=\{z=t:0\le t\le R\}$, $\gamma_{2R}=\{z:|z|=R, 0\le arg\,z\le \pi/n\}=\{z=Re^{it}:0\le t\le \pi/n\}$, $\gamma_{3R}=\{z=te^{\pi i/n}: 0\le t\le R\}$, orijentisana tako da se kružni isječak koji ograničava obilazi u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, za dovoljno veliko R, $(R>1)$, obuhvata tačno jedan izolovani singularitet: $z_0=e^{\frac{\pi i}{2n}}$. Odavde slijedi da je, za $R>1$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{1+z^{2n}}dz &= \int_0^R\frac{1}{x^{2n}}dx+\int_0^{\pi/n}\frac{Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}}+\int_R^0\frac{e^{\pi i/n}dt}{1+t^{2n}}\\ &= 2\pi i\mathrm{Res}(f(z);z_0).\end{aligned}$$

Pri tome je

$$\mathrm{Res}(f(z);z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{1+z^{2n}}=\frac{1}{2nz_0^{2n-1}}=\frac{1}{2n}e^{\frac{-(2n-1)\pi i}{2n}}=-\frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}}{2n}.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi/n}\frac{Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}}\right| &\le \int_0^{\pi/n}\frac{R}{R^{2n}-1}dt\\ &= \frac{\pi R}{n(R^{2n}-1)}\to 0 \text{ kada } R\to\infty.\end{aligned}$$

Na taj način dobijamo da, kada $R \to \infty$, tada je

$$\begin{aligned} -2\pi i \frac{e^{\pi i/n}}{2n} &= I_1 + 0 - e^{\pi i/n} I_1 = I_1(1 - e^{\pi i/n}) \\ &= I_1 e^{\pi i/(2n)} \left(e^{-\pi i/(2n)} - e^{\pi i/(2n)}\right) = -2iI_1 e^{\pi i/(2n)} \sin \frac{\pi i}{2n}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$I = 2I_1 = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n} \, cosec \, \frac{\pi}{2n}.$$

2. Pokazaćemo kako se mogu računati integrali oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\alpha i x} \, dx, \; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx \; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx,$$

gdje je a realan broj veći od nule. Prethodno ćemo dokazati jedan pomoćni rezultat.

Lema 7.3 (Jordanova lema)**.** *Neka je* $D = \{z \in C : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ $f : D \to C$ *neprekidna funkcija na* D *i* $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ *skup izolovanih singulariteta funkcije* f *koji leže u gornjoj poluravni* $\operatorname{Im} z > 0$. *Neka je dalje funkcija* f *analitička na skupu* $\{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus A$ *i* $\lim_{z \to \infty, \mathrm{Im} z \geq 0} f(z) = 0$, *pri čemu je konvergencija ravnomjerna u odnosu na* $\arg z$. *Ako je* $\gamma_r = \{z \in C : |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, *tada*

$$\int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} \, dz \to 0 \textit{ kada } r \to +\infty.$$

Dokaz. Ako sa M_r označimo maksimum funkcije $|f|$ na skupu γ_r, onda iz uslova teoreme slijedi da $M_r \to 0$ kada $r \to \infty$. Koristeći nejednakost

$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi$, koja važi za $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi} d\varphi\right| \\
&\le \int_0^{\pi} |f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi}| d\varphi \le M_r r \int_0^{\pi} e^{-r\sin\varphi} d\varphi \\
&= 2M_r r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi} d\varphi \\
&\le 2M_r r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2r\varphi}{\pi}} d\varphi \\
&= \frac{2M_r r\pi}{2r(1-e^{-r})} \\
&\le M_r\pi \to 0 \text{ kada } r \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Ako sada sa K_r označimo gornju polukružnicu γ_r zajedno sa polupre čnikom $[-r, r]$, tada je

$$\int_{K_r} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_i).$$

Ocijenimo integral $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz$. Uvedimo smjenu $az = w$. Neka je $\Gamma_r = \{w \in C : |w| = ar, \operatorname{Im} w \ge 0\}$. Primijetimo da funkcija $f_1(w) = f(\frac{w}{a})$, $a > 0$, zadovoljava sve uslove iz Jordanove leme, pa

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz = \frac{1}{a}\int_{\Gamma_r} f(\frac{w}{a})e^{iw}\,dw \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Odavde slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; z_i).$$

Primjer 7.4. Izračunaćemo integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

polazeći od integrala

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx.$$

Pri tome je

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_1.$$

Posmatrajmo zatvorenu krivu (v. sliku) $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, gdje su γ_1 i γ_3 duži a γ_2 i γ_4 polukrugovi: $\gamma_1 = \{z \in C : \operatorname{Im} z = 0, -R \leq \operatorname{Re} z < -r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, r \leq \operatorname{Re} z \leq R\}, \gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, pri čemu je $r = 1/R, R > 1$. Neka je kriva Γ orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu.

Tada je

$$0 = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Na osnovu Jordanove leme slijedi

$$\int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

Da bismo ocijenili drugi integral po polukrugu γ_2, primijetimo da za $z \neq 0$ važi

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ c_n = \frac{1}{n!} i^n.$$

Funkcija $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ je analitička u $\mathbb{C}$. Slijedi da je

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_2} h(z)\, dz.$$

Postavljajući $z = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, dobijamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_\pi^0 \frac{1}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi = -i\pi.$$

Funkcija h je ograničena u okolini tačke $z = 0$, pa važi

$$\left| \int_{\gamma_2} h(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_2} |h(z)||dz| \leq \text{const} \cdot \pi r \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to -i\pi \text{ kada } r \to 0.$$

Ukupno važi

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to -i\pi \text{ kada } r \to 0, R \to \infty,$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = -i\pi.$$

Odavde slijedi da je $2I = \text{Im } I_1 = \pi$ i

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Čitaocu ostavljamo da objasni zašto u prethodnom primjeru nije povoljno posmarati kompleksni integral $\int \frac{\sin z}{z} dz$.

Primjer 7.5. Izračunaćemo integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

računjem kompleksnog integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz,$$

gdje je Γ kontura iz prethodnog primjera: $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, koja se sastoji od duži γ_1 i γ_3 i polukružnica γ_2 i γ_4: $\gamma_1 = \{z \in C : \text{Im } z = 0, -R \leq \text{Re } z < -r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \text{Im } z \geq 0\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0, r \leq \text{Re } z \leq R\}$, $\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$, pri čemu je $r = 1/R, R > 1$.

Primijetimo da je

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

U oblasti ograničenoj konturom Γ funkcija $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ nema izolovanih singulariteta, pa je

$$\int_{\Gamma} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{r}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0.$$

Dalje, smjenom $x = -t$ dobijamo

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_r^R \frac{1-e^{-2it}}{t^2}dt,$$

odakle slijedi da ako $r \to 0$ tada

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_r^R f(x)dx = \int_r^R \frac{1-e^{-2ix}}{x^2}dx + \int_r^R \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx$$

$$= 2\int_r^R \frac{1-\cos 2x}{t^2}dx = 4\int_r^R \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \to 4I.$$

Izračunajmo integral $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ i $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ kada $R \to +\infty$, odnosno kada $r \to 0$. Primijetimo da je

$$f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = \frac{2i}{z} + g(z),$$

gdje je g analitička funkcija, koja je, dakle, ograničena u okolini tačke $z_0 = 0$. Odavde slijedi da je

$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)dz\right| \le \int_{\gamma_2} |g(z)||dz| \le Mr\pi \to 0 \text{ kada}$$

Dalje je

$$-\int_{\gamma_2} \frac{2i}{z}dz = 2i\int_0^\pi \frac{1}{re^{it}}rie^{it}dt = -2\pi.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to -2\pi \text{ kada } r \to 0.$$

Ocijenimo još i $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ kada $R \to +\infty$. Imamo da je tada $z = Re^{it}, t \in [0,\pi]$, pa je

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1-e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}}Rie^{it}dt\right| \le \int_0^\pi \frac{1+e^{-2r\sin t}}{R}dt \le \frac{2}{R} \to 0$$

kada $R \to +\infty$.

Ukupno, imamo

$$4I + 2\pi = 0,$$

odakle slijedi da je

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Razmotrimo još kako se, korišćenjem komleksnih funkcija, mogu računati integrali oblika $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$, gdje je α realan broj (interesantan je jedino slučaj kada α nije cio broj), a $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija. Pretpostavlićemo da funkcija Q nema nula na $[0, +\infty)$ i da je $P(0) \neq 0$. Dalje pretpostavljamo da su ispunjeni sljedeći uslovi:

$$\lim_{z\to 0} |z|^\alpha f(z) = \lim_{z\to\infty} |z|^\alpha f(z) = 0.$$

Odavde slijedi da je $\alpha > 0$, a za takve vrijednosti parametra α, posmatrani integral $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$ konvergira. Pri tome postoji cijeli broj $k > \alpha$, takav da je $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ gdje je $A \neq 0$. Da bismo koristili prethodne metode za izvodjenje odgovarajućih formula, treba definisati analitičku funkciju koja će se na $[0, +\infty)$ poklopiti sa podintegralnom funkcijom. Osnovna razlika u odnosu na prethodna razmatranja je ta što je funkcija $z^{\alpha-1}$ višeznačna. Izdvojimo jednu njenu analitičku granu na sljedeći način. Sa D označimo kompleksnu ravan sa rezom $[0, +\infty)$. Neka je h analitička grana funkcije $z^{\alpha-1}$ koja je pozitivna na gornjoj granici reza. U oblasti D je $h(z) = r^{\alpha-1} e^{i\varphi(\alpha-1)}, 0 < \varphi < 2\pi$. Na gornjoj granici reza ($\varphi = 0$) je $h(x + i0) = h(x) = x^{\alpha-1} > 0, x > 0$, dok je na donjoj granici ($\varphi = 2\pi$), $h(x - i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = h(x) e^{i2\pi\alpha}, x > 0$. Tada je

$$f(x - i0) = e^{i2\pi\alpha} f(x).$$

Neka je $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_3$, gdje su, kao i u prethodnom primjeru, γ_2 i γ_4 polukružnice, a γ_1 i γ_3 duži, Tada je

$$\int_\Gamma z^{\alpha-1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} z^{\alpha-1} f(z)\, dz + \int_{-R}^{-r} z^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} f(x)\, dx$$

$$+ \int_{\gamma_3} z^{\alpha-1} f(z)\, dz + \int_r^R x^{\alpha-1} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(z^{\alpha-1} f(z); z_k),$$

pri čemu se sabiraju rezidumi u svim singularitetima funkcije $z^{\alpha-1}f(z)$ koji pripadaju skupu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Ocijenimo prvi i treći integral. Neka je

$$M_r=\max\{|z^{\alpha-1}f(z)|:|z|=r\}=r^{\alpha-1}\max\{|f(z)|:|z|=r\}.$$

Tada

$$r\cdot M_r=r^{\alpha}\max\{|f(z)|:|z|=r\}\to 0 \text{ kada } r\to 0.$$

Odavde slijedi da

$$\left|\int_{\gamma_r} z^{\alpha-1}f(z)dz\right|\le M_r\cdot 2\pi r\to 0 \text{ kada } r\to 0.$$

Na sličan način dokazuje se da

$$\int_{\gamma_R} z^{\alpha-1}f(z)\,dz\to 0 \text{ kada } R\to\infty.$$

To znači da je

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z^{\alpha-1}f(z);z_k)$$
$$=\lim_{r\to 0,R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-r}x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}f(x)\,dx+\int_r^R x^{\alpha-1}f(x)\,dx\right),$$

odnosno

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\,dx=\frac{1}{1-e^{i2\pi\alpha}}2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z^{\alpha-1}f(z);z_k).$$

Primjer 7.6. Izračunaćemo integral

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx.$$

Neka je $f(z)=\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$. Funkcija $g(z)=\frac{1}{1+z^3}$ ima proste polove u tačkama $z_0=-1, z_1=e^{\pi i/3}, z_2=e^{5\pi i/3}$. Napravićeo rez $[0,\infty)$ u $\mathbb{C}$, izabrati analitičku granu funkcije $z \mapsto \sqrt{z}$ definisanu sa $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{it/2}, 0 < t < 2\pi$ i integtraliti po konturi $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, gdje su γ_1 i γ_3 kružnice poluprečnika $r > 0$ i $R > r$ a $\gamma_1 = [r, R]$ i $\gamma_3 = [R, r]$ segmenti

Primijetimo da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_R^r \frac{-\sqrt{x}}{1+x^3}dx + \int_r^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = 2\int_r^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx.$$

Dalje je, za dovoljno malo r,

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}|e^{it/2}|}{|1+r^3e^{3it}|}dt \leq 2\pi\frac{\sqrt{r}}{1-r^3} \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

i slično, za dovoljno veliko R,

$$\left|\int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}|e^{it/2}|}{|1+R^3e^{3it}|}dt \leq 2\pi\frac{\sqrt{R}}{R^3-1} \to 0 \text{ kada } R \to +\infty.$$

Integral po konturi Γ orijentisanoj suprotno kretanju kazaljke na satu možemo računati po formuli

$$\int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz = 2\pi i \sum_{i=0}^{2} \text{Res}(f(z); z_i).$$

Pri tome je

$$\text{Res}(f(z); z_i) = \lim_{z \to z_i}(z - z_i)\frac{\sqrt{z}}{1+z^3} = \frac{\sqrt{z_i}}{3z_i^2},$$

Računajući gornje vrijednosti dobijamo da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

$$= \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=0}^{2} \text{Res}(f(z); z_i) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ako dopustimo da $r \to 0$ i $R \to +\infty$, imamo

$$2I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = \frac{2\pi}{3},$$

odnosno

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3},$$

Primjer 7.7. Ilustrovaćemo kako se pomoću integrala komleksne funkcije mogu računati neke sume. Konkretnije, dokazaćemo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$ i kvadrat Γ_N čija su tjemena $(\pm 1 \pm i)(N+1/2)$. Izolovani singulariteti funkcije f su prosti polovi $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$, dok je nula pol reda tri. Pri tome, ako $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tada je

$$\mathrm{Res}(f(z); k) = \lim_{z \to k} [\frac{z-k}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cos \pi z}{z^2}] = \pi \cos k\pi \cdot \frac{\pi \cos k\pi}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

i

$$\mathrm{Res}(f(z); 0) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{2!} (z^3 f(z))'' \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} (\pi z \cot \pi z)'' = \frac{\pi^2}{3}$$

pa je

$$\int_{\Gamma_N} f(z) dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right)$$

Pri tome je

$$\left| \int_{\Gamma_N} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma_N} |f(z)| \int_{\Gamma_N} \lim_{z \to 0} |dz \lim_{z \to 0}| = M \frac{4(2N+1)\pi}{(N+1/2)^2} \to 0$$

kada $N \to +\infty$, odakle slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8 Primjena logaritamskog reziduma

Logaritamskim izvodom funkcije f naziva se funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}(\ln f(z)).$$

Svaki izolovani singularitet funkcije f je izolovani singularitet funkcije φ. Pored toga, i nule funkcije f su izlovani singulariteti funkcije φ. Zbog toga je prirodno da rezidum funkcije φ sadrži informaciju o nulama i singularitetima funkcije f.

Teorema 8.1. *Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ oblast u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$, $A = \{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq D$ skup polova reda $m_1, \ldots, m_k$ funkcije f u skupu D, a $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup nula reda $l_1, \ldots, l_n$ iste funkcije u oblasti D. Ako je f analitička u oblasti $D \setminus A$, a $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata sve polove i sve nule funkcije f onda je*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da je funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

analitička na skupu $D \setminus (A \cup B)$. Pri tome, za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$, postoji okolina $O_j = \{z \in C : |z - a_j| < r_j\}$ tačke a_j, takva da za $z \in O_j$ važi jednakost: $f(z) = (z - a_j)^{l_j} g(z)$, gdje je funkcija g analitička u O_j i $g(a_j) \neq 0$. Odavde slijedi da je za $z \in O_j$,

$$\varphi(z) = \frac{l_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

To znači da je $z = a_j$ pol prvog reda funkcije φ, pa je $\mathrm{Rez}(\varphi; a_j) = l_j$.

Dalje, za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoji $r_i > 0$, takvo da ako $z \in K_i = \{z \in C : 0 < |z - z_i| < r\}$, tada je

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_i)^{m_i}}, h(z_i) \neq 0.$$

Pri tome je z_i otklonjiv singularitet funkcije h, pa je za $z \in K_i$,

$$\varphi(z) = \frac{-m_i}{z - z_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

To znači pa je i tačka z_i pol prvog reda funkcije φ, a $\operatorname{Res}(\varphi; z_i) = -m_i$. Prema teoremi o rezidumu, odavde slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

□

Prethodna teorema ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju.

Teorema 8.2 (Princip argumenta)**.** *Ako su ispunjeni uslovi prethodne teoreme, onda je razlika* $\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i$ *izmedju broja nula i broja polova funkcije* f *jednaka broju obilazaka krive* $\gamma = f(\Gamma)$ *za jedan obilazak krive* Γ.

Dokaz. Pošto je

$$\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

dovoljno je dokazati da je integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

jednak broju obilazaka krive γ. Dalje, iz jednakosti $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$, slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z)|_\Gamma,$$

gdje je sa $\Delta \arg f(z)|_\Gamma$ označena promjena argumanta vrijednosti funkcije f kada se obidje kontura Γ. Odavde, s obzirom da se obilaskom krive γ argument $f(z)$ promijeni za 2π, slijedi tvrdjenje teoreme. □

Primjedba 8.3. Tvrdjenje teoreme važi i ako se pretpostavi da je funkcija f analitička u $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$, a kontura Γ ograničava oblast D.

Za dokaz još jedne teoreme o broju nula analitičke funkcije, potreban je jedan pomoćni rezultat.

Lema 8.4. *Ako su $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ i $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ dio po dio glatke zatvorene krive i $a \in \mathbb{C}$ kompleksan broj takav da je*

$$(\forall t \in [\alpha, \beta]) \ |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |a - \gamma_1(t)| + |a - \gamma_2(t)|,$$

onda je

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a).$$

Dokaz. Iz uslova leme slijedi da tačka a ne pripada nijednoj od krivih $\gamma_1^* = \{\gamma_1(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ i $\gamma_2^* = \{\gamma_2(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$, pa je funkcija

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - a}{\gamma_2(t) - a}$$

definisana na $[\alpha, \beta]$. Pri tome važi

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - a} - \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - a}.$$

Iz uslova leme slijedi da je $|1 - \gamma(t)| < 1 + |\gamma(t)|$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$. To znači da kriva $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ pripada uglu $\Delta = \{z : -2\pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$ koji je prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$. Funkcija

$$h(z) = \ln(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

je definisana i analitička na Δ i pri tome je $h'(z) = 1/z$. Dalje, odavde, uzimajući u obzir da je γ zatvoren put, dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 h'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d}{dt}(h(\gamma(t)))\mathrm{d}t = h(\gamma(\beta)) - h(\gamma(\alpha)) = 0.\end{aligned}$$

Odavde i iz definicije indeksa krive slijedi da je $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a) = 0$, odnosno $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)$. □

Teorema 8.5 (Roucheova teorema)**.** *Neka su funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma$, $|f(z)+g(z)| < |f(z)|+|g(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Napomenimo da se u iskazu teoreme podrazumijeva da se svaka nula računa onoliko puta kolika je njena višestrukost.

Broj nula funkcije f i broj nula funkcije g označimo sa $N(f)$ i $N(g)$. Neka je $\gamma_1 = f(\Gamma)$ i $\gamma_2(s) = g(\Gamma)$. Ispunjeni su uslovi prethodne leme (za $a = 0$), pa je $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(0) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(0)$. S druge strane je

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

i

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz.$$

Odavde, s obzirom da je prema teoremi 8.1 $N(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ i $N(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz$, slijedi da je $N(f) = N(g)$. $\square$

U formi posljedica dajemo još dvije formulacije Roucheove teoreme.

Posljedica 8.6. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i $F = f + g$ imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Iz uslova slijedi da, za svako $z \in \Gamma$, važi

$$|g(z)| - |-f(z)| < 0 \leq |f(z) + g(z)| = |F(z)|,$$

pa je

$$|F(z)| + |-f(z)| > |g(z)| = |F(z) + (-f(z))|, \text{ za svako } z \in \Gamma.$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije F i $-f$ imaju isti broj nula u Ω. $\square$

Posljedica 8.7. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako za svako $z \in \Gamma$ važi $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Primjenom prethodne posljedice na par funkcija f i $G = g - f$, dobijamo da funkcije f i $G + f = g$ imaju isti broj nula u Ω. $\square$

I jedno svojstvo univalentntih funkcija može se izvesti kao posljedica Roucheove teoreme.

Posljedica 8.8. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ univalentna u oblasti D onda je, za svako $z \in D$, $f'(z) \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $z_0 \in D$, takvo da je $f'(z_0) = 0$. Tada je z_0 izolovana nula funkcije f'. U nekoj okolini $O(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ tačke z_0 funkciju f možemo razložiti u Taylorov red:

$$f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots = c_0 + (z - z_0)^k h(z),$$

gdje je $k \geq 2$ i $c_k \neq 0$, $h(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots$. Pri tome je $h(z_0) \neq 0$, pa postoji $\delta > 0$, takvo da važi:

$$((\forall z \in D)\ 0 < |z - z_0| < \delta) \Longrightarrow f'(z) \neq 0,$$

$$((\forall z \in D)\ |z - z_0| \leq \delta) \Longrightarrow (h(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots \neq 0)\,.$$

Odavde slijedi da je $m = \min\{|c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots| : |z - z_0| = \delta\} > 0$. Posmatrajmo funkcije

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k h(z) = f(z) - c_0,\ \psi(z) = -\alpha + \varphi(z),$$

gdje je $0 < |\alpha| < m \cdot c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$. Ove funkcije na krugu $|z - z_0| \leq \delta$ zadovoljavaju uslove Roucheove teoreme. Broj nula funkcije φ u krugu $|z - z_0| < \delta$ jednak je n, pa je i broj nula funkcije ψ jednak n, i sve nule su proste. To znači da postoji $n \geq 2$ tačaka skupa D koje pripadaju krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$, za koje je $f(z) = c_0 + \alpha$. To medjutim nije moguće, jer je, prema pretpostavci, funkcija f univalentna. $\square$

Posljedica 8.9 (Osnovni stav algebre)**.** *Polinom $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ nad poljem kompleksnih brojeva ima tačno n nula.*

Dokaz. Ovu značajnu teoremu dokazali smo ranije. Dokaz koji ćemo ovdje prezentirati zasnovan je na primjeni Roucheove teoreme.

Primijetimo da je

$$
\begin{aligned}
|P_n(z)\,| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n \left(1 + b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1\frac{1}{z^{n-1}} + b_0\frac{1}{z^n}\right)| \\
&\geq |a_n z^n \left(1 - \left|b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1\frac{1}{z^{n-1}} + b_0\frac{1}{z^n}\right|\right) \\
&\geq |a_n z^n (1 - |b_{n-1}|\frac{1}{|z|} - \cdots - b_1\frac{1}{|z^{n-1}|} - b_0\frac{1}{|z^n|})|,
\end{aligned}
$$

gdje je $b_i = a_i/a_n$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Pošto postoji $r > 0$, takvo da za $|z| \geq r$ važi

$$
|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1\frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0\frac{1}{|z^n|} < \frac{1}{2},
$$

tada za $|z| \geq r$ važi

$$
|P_n(z)| > \frac{|a_n z^n|}{2}.
$$

Neka je $g(z) = P_n(z), f(z) = -a_n z^n$. Tada za $z \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ važi

$$
\begin{aligned}
|f(z) + g(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n||b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1\frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0\frac{1}{|z^n|} \\
&\leq |a_n z^n|(|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1\frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0\frac{1}{|z^n|} \\
&< \frac{|a_n z^n|}{2} < |a_n z^n| < |f(z) + |g(z)|.
\end{aligned}
$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije $g(z) = P_n(z)$ i $f(z) = -a_n z^n$ imaju isti broj nula u $\Omega = \{z \in C : |z| < r\}$. Taj broj nula jednak je n, što znači da polinom P_n ima n nula u $\mathbb{C}$. □

Primjer 8.10. Dokažimo da jednačina $3 + z^2 = ze^{iz}$ ima tačno jedno rješenje u otvorenoj gornjoj poluravni. Posmatrajmo funkcije $f(z) = 3 + z^2$ i $g(z) = -ze^{iz}$. Neka je $\Omega = \{z : |z| \leq R, \mathrm{Im}\, z \geq 0$ polukrug u gornjoj poluravni, poluprečnika $R > \sqrt{5}$. Tada za $z \in [-R, R]$, $|f(z)| \geq 3 >$

$|g(z)| = 2$. Dalje, za $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ važi: $|f(z)| \geq R^2 - 3 > 2$, $|g(z)| = 2e^{-R\sin t} \leq 2$. Prema Roucheovoj teoremi, funkcija $f + g$ u polukrugu Ω ima isti broj nula kao i funkcija f, dakle jednu. Pošto je R proizvoljan broj veći od $\sqrt{5}$, odavde slijedi da jednačina $3 + z^2 = ze^{iz}$ ima tačno jednu nulu u gornjoj poluravni.

Zadaci

1. Izračunati integrale

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^n + 1}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$.

2. Izračunati integrale

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x(x^2+1)}$,

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xdx}{(x^2+1)^3}$,

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x/2dx}{x^2-1}$,

   d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nxdx}{1-a\cos x}, a \in (-1, 1)$.

3. Izračunati integrale

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln xdx}{x^2+1}$,

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}$,

   c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1}dx$.

4. Dokazati da je

   a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} = \frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}(\alpha, \beta > 0)$, b) $\int_0^{\infty} \cos x^2\, dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\pi/8}$, c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx`}{(x^2+1)\sqrt{x}} = \pi\sqrt{2}/2$.

5. Dokazati jednakosti

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a\ (a > 0)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

6. Neka je a prosti pol funkcije f, koja je analitička u prstenu $\{z : 0 < |z-a| < R\}, R > 0$, $b = \mathrm{Res}(f; a)$ i $\varphi(t) = a + re^{it}, 0 < r < R, t \in [t_0, t_1], 0 \leq t_0 < t_1 \leq 2\pi$. Dokazati da je tada
$$\lim_{r \to 0} \int_{|z-a|=r} f(z)dz = ib(t_1 - t_0).$$

7. Odrediti broj nula polinoma $P_5(z) = z^5 + 5z^3 + 2z$ a) u krugu $|z| < 1$; b) u prstenu $1 \leq |z + | < 2$; c) u prstenu $2 \leq |z| < 3$.

8. Odrediti broj rješenja jednačine $P(z) = 0$ u oblasti D ako je

   a) $P(z) = z^4 - 9z + 1,\ D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$,

   b) $P(z) = z^{2n} + 4z^{2n-1} + 1 + 1 = 0,\ D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0\}$.

9. Dokazati da za veliko $n \in \mathbb{N}$ jednačina
$$2 - 2 \cdot 3z + 3 \cdot 4z^2 + \cdots + (-1)^n(n+1)(n+2)z^n = 0$$
nema rješenja u oblasti $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

10. Dokazati da jednačine a) $z \sin z = 1$ i b) $\tan z = z$ imaju samo realna rješenja.

11. Dokazati da za $R > 0$ i dovoljno veliko N jednačina
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = 0$$
nema rješenja u krugu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

12. Dokazati da jednačina $z \cos z = 0$ ima tačno dva rješenja koja nisu realna.

13. Neka je λ realan broj veći od 1. Dokazati da jednačina $z + e^{-z} = \lambda$ u otvorenoj desnoj poluravni ima tačno jedno rješenje i da je to rješenje realan broj.

Glava 4

Konformna preslikavanja

1 Geometrijske i topološke karakteristike analitičkih funkcija. Univalentne funkcije

Afino preslikavanje $f(z) = w = az + b$ $(a \neq 0)$ koje je definisano na $\mathbb{C}$ je bijekcija skupa $\mathbb{C}$. Inverzno preslikavanje, definisano formulom $g(w) = z = \frac{1}{a}w - \frac{a}{b}$, takođe je afino preslikavanje. Nas interesuju geometrijska svojstva preslikavanja f.

Ako je $a = 1$, onda je preslikavanje f translacija. Ako je $b = 0$ i $|a| = 1$, onda je $a = e^{i\alpha}$ i $f(z) = f(re^{i\varphi}) = re^{i(\varphi+\alpha)}$, što znači da je tada $f(z) = az$ rotacija za ugao $\alpha = \arg a$. Ako je a pozitivan realan broj, onda je $f(z) = f(re^{i\varphi}) = are^{i\varphi}$ homotetija sa koeficijentom homotetije a i centrom u tački 0.

Preslikavanje $f(z) = az + b$ tački $z = re^{i\varphi}$ pridružuje tačku $f(z) = f(re^{i\varphi}) = |a|e^{i\alpha}re^{i\varphi} + b$, što znači da je f kompozicija homotetije sa centrom u 0 i koeficijentom $|a|$, rotacije za ugao $\alpha = \arg a$ i translacije za b.

Ako postavimo $f(\infty) = \infty$, onda se f može posmatrati kao preslikavanje iz $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$.

Iz nabrojanih svojstava preslikavanja $f(z) = az + b$ slijedi da je ugao $\angle(z_1, z_0, z_2)$ koji obrazuju tačke z_0, z_1 i z_2 jednak uglu $\angle(w_1, w_0, w_2)$ koji obrazuju njihove slike $w_0 = f(z_0), w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$. Drugim riječima, preslikavanje f čuva uglove u svakoj tački $z \in \mathbb{C}$.

Naš cilj je da utvrdimo koja preslikavanja kompleksne ravni imaju slična svojstva. Preciznije, htjeli bismo da utvrdimo koja sve preslikavanja čuvaju uglove, koja su hometitična (u fiksiranoj tački ili na nekom skupu). Potrebno je, međutim, prethodno precizno definisati ove pojmove.

Definicija 1.1. *Preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ čuva uglove u tački z_0 oblasti D ako postoji okolina $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0, takva da je $f(z) \neq f(z_0)$ za svako $z \in \mathcal{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$ i postoji*

$$\lim_{r\to+0} e^{-i\varphi} e^{i\arg(f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0))} = e^{-i\varphi} \lim_{r\to+0} \frac{f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)|},$$

koji ne zavisi od φ.

Grubo govoreći, ako je gornji limes jednak $e^{i\alpha}$, onda se može reći da je u okolini tačke z_0 preslikavanje f (približno) kompozicija rotacije za ugao α, neke homotetije i translacije.

Primjer 1.2. Preslikavanje $f(z) = az + b$, $(a \neq 0)$ u svakoj tački $z_0 \in \mathbb{C}$ čuva uglove (u smislu prethodne definicije).

Zaista, ako je z_0 proizvoljna tačka kompleksne ravni, tada je

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi} \lim_{r\to+0} &\frac{f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)|} \\ &= e^{-i\varphi} \lim_{r\to+0} \frac{a(z_0+re^{i\varphi})+b-(az_0+b)}{|a(z_0+re^{i\varphi})+b-(az_0+b)|} = \frac{a}{|a|}, \end{aligned}$$

a odavde slijedi tvrđenje.

Definicija 1.3. *Preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ ima u tački z_0 oblasti D svojstvo podjednakog istezanja u svim pravcima ako postoji okolina $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0, takva da je $f(z) \neq f(z_0)$ za svako $z \in \mathcal{O}(z_0) \setminus \{z_0\}$ i postoji*

$$\lim_{r\to+0} \frac{|f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)|}{r},$$

koji ne zavisi od φ.

Geometrijski, za funkciju koja je univalentna u nekoj okolini tačke z_0, gornji uslov označava da preslikavanje f krug malog poluprečnika preslikava u krivu koja je bliska krugu, odnosno da se, u smislu graničnog procesa, krug beskonačno malog poluprečnika slika u krug takođe beskonačno malog poluprečnika. To je razlog zbog kojeg se gornje svojstvo naziva svojstvom podjednakog istezanja u svim pravcima.

Primijetimo da ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački z_0, onda je

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + |h|\alpha(h) \approx f(z_0) + f'(z_0)h.$$

Odavde, postavljajući $h = re^{i\varphi}$, slijedi

$$\lim_{r\to 0} \frac{|f(z_0+re^{i\varphi}) - f(z_0)|}{r} = |f'(z_0)|,$$

nezavisno od φ.

Više svijetla na gornje definicije daju teoreme i definicije koje slijede.

Teorema 1.4. *Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ oblast i $f : D \to \mathbb{C}$ diferencijabilna funkcija u tački $z_0 \in D$, pri čemu je $f'(z_0) \neq 0$. Tada važe sljedeća tvrđenja:*

a) preslikavanje f čuva uglove u tački z_0;

b) preslikavanje f ima svojstvo podjednakog rastezanja u svim pravcima u tački z_0.

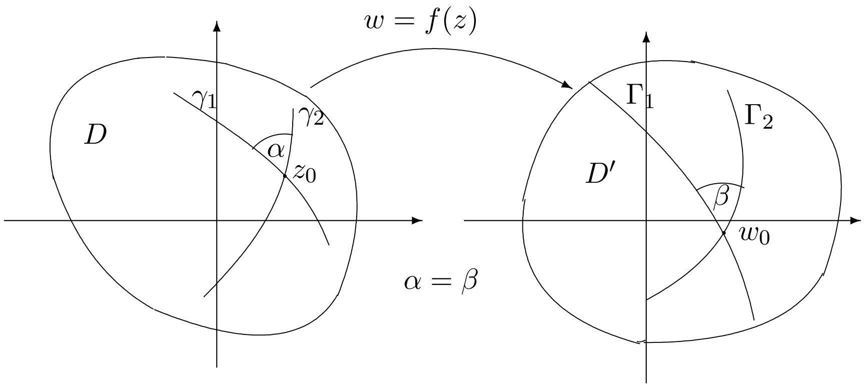
Pretpostavimo da je funkcija f još i univalentna u nekoj okolini tačke z_0. Tada važe i sljedeća tvrđenja:

c) Ako je $\gamma \subseteq D$ glatka kriva i $z_0 \in D$, onda je $\Gamma = f(\gamma)$ glatka kriva i ako je α ugao koji kriva γ u tački z_0 zahvata sa pozitivnim dijelom x-ose a α_* ugao koji kriva Γ u tački $w_0 = f(z_0)$ zahvata sa pozitivnim dijelom u-ose, onda je $\alpha_* = \alpha + \arg f'(z_0) (\mathrm{mod} 2\pi)$.

d) Ako su $\gamma_1 \subseteq D$ i $\gamma_2 \subseteq D$ glatke krive koje prolaze kroz tačku z_0 i $\Gamma_1 = f(\gamma_1), \Gamma_2 = f(\gamma_2)$, onda je ugao[1] između krivih Γ_1 i Γ_2 u tački $w_0 = f(z_0)$ jednak uglu između krivih γ_1 i γ_2 u tački z_0 (v. sliku 4.1).

Dokaz. Na početku istaknimo da iz uslova $f'(z_0) \neq 0$ slijedi da je funkcija f univalentna u nekoj okolini tačke z_0 (v. tvrđenje 1.10). To znači da je dopunski uslov o jednolisnosti preslikavanja f suvišan.

[1] *Pod uglom između glatkih krivih koje se sijeku u tački z_0, podrazumijeva se ugao izmeđ u njihovih tangenti u z_0.*



Slika 4.1: Konformno preslikavanje u tački.

a) Iz pretpostavke da je $f'(z_0) \neq 0$ slijedi da za proizvoljno $\varphi \in [0, 2\pi)$ važi

$$f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0) = f'(z_0)re^{i\varphi} + r\delta(r), \delta(r) \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Odavde dalje imamo da

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi}e^{i\arg(f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0))} &= e^{-i\varphi}\frac{f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)|} \\ &= \frac{f'(z_0)r + r\delta(r)e^{-i\varphi}}{|f'(z_0)re^{i\varphi} + r\delta(r)|} \to \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|} \text{ kada } r \to 0, \end{aligned}$$

šo znači da preslikavanje f čuva uglove u tački z_0.

b) Iz

$$\lim_{r\to+0} \frac{|f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0)|}{r} = \lim_{r\to+0} \frac{|f'(z_0)r + r\delta(r)|}{r} = |f'(z_0)|$$

slijedi da preslikavanje f u tački z_0 ima svojstvo podjednakog rastezanja u svim pravcima.

c) Dalja razmatranja vežemo za okolinu $\mathcal{O}(z_0)$ tačke z_0 u kojoj je funkcija $f = u + iv$ univalentna.

Ako je kriva γ zadata sa

$$\gamma = \{\varphi(t) = r(t)e^{it} : t \in [\alpha, \beta]\} \subseteq \mathcal{O}(z_0),$$

onda je

$$\Gamma = f(\gamma) = \{\psi(t) = f(\varphi(t)) = f(r(t)e^{it}) : t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Pri tome je

$$r(t_0)e^{it_0} = z_0 \text{ za neko } t = t_0 \in (\alpha, \beta) \text{ i } w_0 = f(z_0) = \psi(t_0).$$

Odavde slijedi da je $\psi'(t_0) = f'(z_0)\varphi'(t_0)$. Tada za ugao α_* koji kriva Γ u tački $w_0 = f(z_0)$ zahvata sa pozitivnim dijelom u-ose, važi

$$e^{i\alpha_*} = \frac{\psi'(t_0)}{|\psi'(t_0)|} = \frac{f'(z_0)\varphi'(t_0)}{|f'(z_0)\varphi'(t_0)|} = e^{i\beta}e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\beta)},$$

gdje je $\beta = \arg f'(z_0)$. Odavde slijedi tvrđenje c).

Tvrđenje d) je neposredna posljedica tvrđenja c). □

U dokazu tvrđenja c) sadržana je i geometrijska interpretacija argumenta i modula izvoda $f'(z_0)$. Naime, argument broja $f'(z_0)$ jednak je razlici uglova koje sa realnim osama zahvataju tangenta u tački z_0 na neku krivu γ i tangenta na njenu sliku $\Gamma = f(\gamma)$ u tački $w_0 = f(z_0)$, odnosno argument broja $f'(z_0)$ je ugao za koji preslikavanje f rotira krive (preciznije, njihove tangente) koje prolaze kroz $(z_0, f(z_0))$. Modul izvoda $|f'(z_0)|$ pokazuje koliko je istezanje u svim pravcima.

Važi tvrđenje koje je djelimično obratno tvrđenju a). Preciznije, važi teorema.

Teorema 1.5. *Neka su realni dio i imaginarni dio preslikavanja $f = u + iv$ diferencijabilne funkcije u tački (x_0, y_0) i neka je matrica parcijalnih izvoda funkcija u i v u tački (x_0, y_0) različita od nule. Ako preslikavanje f čuva uglove u tački $z_0 = x_0 + iy_0$, onda je ono diferencijabilno u z_0 i pri tome je $f'(z_0) \neq 0$.*

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da je

$$u(x_0+h_1, y_0+h_2) = u(x_0, y_0)+\partial_1 u(x_0, y_0)h_1+\partial_2 u(x_0, y_0)k_2+|h|\alpha(h_1, h_2),$$

$$v(x_0+h_1, y_0+h_2) = v(x_0, y_0)+\partial_1 v(x_0, y_0)h_1+\partial_2 v(x_0, y_0)h_2+|h|\alpha(h_1, h_2),$$

gdje je $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Ako uvedemo oznake

$$A = \partial_1 u(x_0, y_0)+i\partial_1 v(x_0, y_0), \quad B = \partial_2 u(x_0, y_0)+i\partial_2 v(x_0, y_0), h = h_1+ih_2,$$

onda je bar jedan od brojeva A i B različit od nule. Tada prethodne jednakosti možemo pisati u obliku

$$f(z_0+h) = f(z_0) + Ah + B\bar{h} + |h|\alpha(h), \alpha(h) \to 0 \text{ kada } h \to 0.$$

Odavde dobijamo da je

$$\lim_{r\to+0} e^{-i\varphi} e^{\arg(f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0))} = \frac{A+Be^{-2i\varphi}}{|A+Be^{-2i\varphi}|}.$$

Pošto preslikavanje f čuva uglove, količnik

$$\frac{A+Be^{-2i\varphi}}{|A+Be^{-2i\varphi}|}$$

ne zavisi od φ, a to je moguće jedino ako je $B=0$. Međutim, tada je

$$f(z_0+h) = f(z_0) + Ah + |h|\alpha(h), \alpha(h) \to 0 \text{ kada } h \to 0,$$

odakle slijedi da je funkcija f diferencijabilna u tački z_0 i njen izvod je $f'(z_0) = A \neq 0$. □

Definicija 1.6. *Za preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ kažemo da je konformno u tački $z_0 \in D$ oblasti D ako je ono jednolisno u nekoj okolini tačke z_0, a u tački z_0 čuva uglove i ima svojstvo podjednakog istezanja u svim pravcima.*

Iz prethodnih razmatranja slijedi da ako je preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ diferencijabilno u z_0, jednolisno u nekoj okolini tačke z_0 i ako je $f'(z_0) \neq 0$, onda je f konformno u tački z_0. Važi i obratno tvrđenje.

Teorema 1.7. *Ako je preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ konformno u tački z_0, onda je ono diferencijabilno u toj tački i $f'(z_0) \neq 0$.*

Dokaz. Označimo sa k graničnu vrijednost iz definicije uslova očuvanja uglova a sa ρ graničnu vrijednost iz definicije uslova podjednakog istezanja u svim pravcima. Tada je $|k| = 1$, pa je $k = e^{i\theta}$. Posmatrajmo količnik

$$K = K(r,\varphi)\frac{f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)}{re^{i\varphi}}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{r\to0} K(r,\varphi) &= \lim_{r\to0} e^{-i\varphi}\frac{f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)}{|f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)|}\cdot\frac{f(z_0+re^{i\varphi})-f(z_0)|}{r}\\ &= k\rho = \rho e^{i\theta}.\end{aligned}$$

To znači da postoji $f'(z_0)$ i da je $f'(z_0) = \rho e^{i\theta}$. Pri tome je, prema pretpostavci, koeficijent istezanja u tački z_0 različit od nule, pa je, dakle, $f'(z_0) \neq 0$. $\square$

Definicija 1.8. *Za preslikavanje $f : D \to \mathbb{C}$ koje je definisano u oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je konformno ako je konformno u svakoj tački te oblasti.*

Naš cilj je da ustanovimo vezu između konformnih preslikavanja i analitičkih funkcija. U tom cilju, prethodno ćemo dokazati sljedeće važno tvrđ enje.

Lema 1.9. *Neka je f analitička funkcija u nekoj tački a kompleksne ravni. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da za $\max\{|z-a|, |w-a|\} < \delta$ i $z \neq w$ važi*

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a)\right| < \varepsilon.$$[2]

Dokaz. Pošto je f analitička u a, slijedi da postoji disk $D(a,r)$ na kojem je f analitička, pa dakle i neprekidna na. Koristeći Taylorovu formulu za $|z-a| < r$ imamo

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Zato za $|z-a| < r$ i $|w-a| < r$ imamo

$$f(z) - f(w) = f'(a)(z-w) + (z-w)\sum_{n=2}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^{n-k}(w-a)^k.$$

Odavde slijedi da je

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} (z-a)^{n-k}(w-a)^k,$$

odakle dalje dobijamo da za $|z-a| \leq \delta \leq \rho < r$ i $|w-a| \leq \delta \leq \rho < r$, (gdje je $\rho > 0$ fiksiran realan broj), važi:

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z-a|^{n-k}|w-a|^k \leq \delta \sum_{n=2}^{\infty} n|c_n|\rho^n.$$

[2]*Ako stavimo $F(z,w) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ za $z \neq w$ i $F(z,w) = f'(z)$ za $z = w$, iz ove teoreme slijedi da je tada (pod uslovima iz teoreme) F neprekidna u nekoj okolini* $\max\{|z-z_0|; |w-z_0| < r\}$.

Pošto je red $\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n|\rho^n$ konvergentan za $\rho < r$ (radijus konvergencije reda $\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n|z^n$ je isti kao radijus konvergencije Taylorovog reda funkcije f, vidi Posljedicu 6.7), slijedi da je

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n|\rho^n = M < \infty.$$

Zato za unaprijed dato ε, uzimajući $\delta = \min\{\varepsilon/(M+1), \rho\}$, dobijamo tvrđ enje teoreme. □

Posljedica 1.10. *Neka je funkcija $f : D \to C$ analitička u tački z_0 oblasti D i neka je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoji okolina $\mathcal{O}(z_0) \subseteq D$ tačke z_0 takva da je $f|_{\mathcal{O}(z_0)} : \mathcal{O}(z_0) \mapsto f(\mathcal{O}(z_0))$ bijekcija.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja 1.9 postoji $\rho > 0$, takvo da za $|z - z_0| < \rho$ i $|w - w_0| < \rho$ važi

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(z_0)\right| < 1/2|f'(z_0)|,$$

što znači da je na tom skupu

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w}\right| > 1/2|f'(z_0)| > 0.$$

Odavde slijedi da je $f(z) \neq f(w)$ za $z, w \in \{z \in BbbC : |z - z_0| < \rho)$ i $z \neq w$, pa je funkcija f injektivna na $\mathcal{O}(z_0, \rho)$.

□

Teorema 1.11 (Teorema o otvorenom preslikavanju)**.** *Ako je f nekonstantna analitička funkcija, definisana na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ i $D \subset \Omega$ otvoren skup, onda je $f(D)$ otvoren skup. Specijalno, $f(\Omega)$ je otvorena oblast.*

Dokaz. Neka je $a \in D$ i $b = f(a)$. Na osnovu teoreme o nulama analitičke funkcije, postoji krug $\overline{D}(a, r) \subset D$ sa svojstvom da funkcija $f(z) - b$ nema drugih nula (osim tačke a) na tom krugu. Neka je $\delta = \min_{|z-a|=r} |f(z)-b|$. Tada je $\delta > 0$. Dokažimo da je skup $D(b, \delta/2) \subset f(D)$. Ako je $D(b, \delta) \subset f(D)$, onda je i $D(b, \delta/2) \subset f(A)$. Ako je $w \in D(b, \delta) \setminus f(D)$, tada je[3]

$$\frac{1}{|b - w|} \le \sup_{|z-a|=r} \frac{1}{|f(z) - w|} \le \sup_{|z-a|=r} \frac{1}{|f(z) - b| - |b - w|} \le \frac{1}{\delta - |b - w|}.$$

[3] *Ako je g analitička na nekom skupu koji sadrži krug $D(c, r)$ onda je, na osnovu principa maksimuma, $|g(c)| \le \sup_{|z-c|=r} |g(z)|$. U ovom slučaju je $g(z) = 1/(f(z) - w)$ i $c = a$.*

Odavde slijedi da je $\delta/2 \leq |w-b|$, odnosno da za svako $w \in D(b, \delta/2)$, $w \in f(D)$. To znači da je $f(D)$ otvoren skup. Pošto je skup Ω otvoren i povezan, slijedi da je i $f(\Omega)$ otvoren i povezan skup. Tvrđenje je dokazano. $\square$

Napomenimo da se pomoću Roucheove teoreme može dokazati, da u oznakama i terminima prethodne teoreme, važi $D(b, \delta) \subset f(\Omega)$.

U paragrafima (2.6) i (2.7) definisali smo funkcije $\log z$, $\sqrt[n]{z}$ i $\arg z$ u nekim specijalnim prosto-povezanim oblastima prostora $\mathbb{C}^*$. Sljedeća lema tvrdi da je to moguće uraditi u proizvoljnoj prosto-povezanoj oblasti prostora $\mathbb{C}^*$.

Lema 1.12. *Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ prosto povezana oblast, $a, z \in \Omega$ proizvoljne tačke i γ_z proizvoljna dio po dio glatka kriva sa početkom u tački a i krajem u tački z. Neka je dalje $\varphi \in (-\pi, \pi]$ jedinstveno rješenje jednačine $e^{i\varphi} = a/|a|$ (vidi paragraf 2.3). Tada je za svaki cijeli broj k,*

a)

$$g_k(z) = \log_{\Omega,k}(z) := \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \log|a| + i\varphi + 2k\pi i,\ z \in \Omega$$

dobro definisana analitička funkcija na Ω, pri čemu je $g_k'(z) = 1/z$ i $g_k \circ \exp = id$ i koja se naziva logaritamskom funkcijom (ili logaritmom) na Ω;

b)

$$h_k(z) = \sqrt[n]{z}_{\Omega,k} = e^{(1/n)\log_{\Omega,k}(z)}$$

dobro definisana analitička funkcija na Ω koja zadovoljava uslove $h_k^n(z) = z$ i $h_k'(z) = h_k(z)/(nz)$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$ i koja se naziva korijenom funkcijom na Ω;

c)

$$a_k(z) = \arg_{\Omega,k} z = \operatorname{Im} \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \varphi + 2k\pi$$

dobro definisana neprekidna i harmonijska funkcija na Ω, koju nazivamo argumentom na oblasti Ω.

Dokaz. (a) Primijetimo da je, za svaki cijeli broj k, funkcija g_k inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $\exp : g_k(\Omega) \mapsto \Omega$, koju je prirodno zvati logaritamskom funkcijom .

Posmatrajmo funkcija $h(z) = 1/z$, koja je analitička u Ω. Neka su γ_z i δ_z dvije krive sa istim početkom i krajem, koje leže u Ω. Tada je $c = \gamma_z + \overline{\delta_z}$ zatvorena kriva koja pripada prosto povezanoj oblasti Ω. Na osnovu Cauchyeve teoreme imamo da je $\int_c h(z)\mathrm{d}z = 0$, odnosno,

$$\int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\delta_z} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Odavde slijedi da je g_k dobro definisana funkcija. Ako je $h \in \mathbb{C}$, takvo da $[z, z+h] \in \Omega$, tada, stavljajući $\gamma_{z+h} := \gamma_z + [z, z+h]$, dobijamo

$$g_k(z+h) - g_k(h) = \int_z^{z+h} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Parametrizacijom $[0,1] \ni t \mapsto z + th = p(t) \in [z, z+h]$ duži $[z, z+h]$ imamo da je

$$\begin{aligned} g_k(z+h) - g_k(z) &= \int_0^1 \frac{p'(t)}{p(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{dt}\log(p(t))\mathrm{d}t \\ &= \log(p(1)) - \log(p(0)) = \log(z+h) - \log z. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $g_k'(z) = 1/z$, što je trebalo dokazati.

Dakle, g_k je analitička funkcija i pri tome je $(g_k(e^w) - w)' = \frac{e^w}{e^w} - 1 = 0$, odnosno $g_k(e^w) - w = const$. Stavljajući $w = i\varphi + 2k\pi i + \log|a|$, dobijamo $g_k(e^w) - w = g_k(a) - (i\varphi + 2k\pi i + \log|a|) = 0$. To znači da je $g_k(e^w) = w$ za svako $w \in \mathbb{C}$ a takođe i $e^{g_k(z)} = z$ za svako $z \in \mathbb{C}$. Drugim riječima, g_k je inverzna eksponencijalnoj funkciji.

b) Iz a) slijedi $h_k^n(z) = e^{(n/n)g_k(z)} = z$. Diferencirajući posljednju jednakost, dobijamo $h_k'(z) = h_k(z)/(nz)$. Time je dokazano da da *na svakoj prosto povezanoj oblasti postoji korijena funkcija.*

c) Za svaki cijeli broj k, funkcija a_k je harmonijska, jer je imaginarni dio analitičke funkcije g_k. Takođe iz

$$e^{ia_k(z)} \cdot e^{\mathrm{Re}\, g_k(z)} = e^{g_k(z)} = z$$

slijedi da je a_k funkcija-argument. □

Sljedeća tvrđenja upotpunjavaju sliku o vezi između konformnosti, jednolisnosti i biholomorfnosti analitičkih funkcija.

Teorema 1.13. *a) Ako je f analitička funkcija u tački a koja je nula $m-1$-og reda funkcije f', onda je f $m-$valentna funkcija u nekoj šupljoj okolini tačke a.*[4]

b) Ako je f univalentna analitička funkcija u nekoj okolini Ω tačke a, onda je $f'(a) \neq 0$. [5].

Dokaz. Na osnovu teoreme o nulama analitičke funkcije, postoje prirodan broj m i analitička na skupu $D(a,r)$ funkcija g, takvi da je

$$f(z) = f(a) + (z-a)^m g(z), \text{ gdje je } g(z) \neq 0 \text{ za } z \in D(a,r) \subseteq \Omega.$$

Takođe postoji $r_1 \in (0,r]$, takvo da za za svako $z \in D(a,r_1)$ važi: $|g(z) - g(a)| < |g(a)|$. Dakle, skup $g(D(a,r_1))$ pripada krugu $D = \{w : |w - g(a)| < |g(a)|\}$, koji je prosto povezana oblast proširene kompleksne ravni $\overline{\mathbb{C}}$. Ako je $m = 1$, onda je $f'(a) = g(a) \neq 0$.

Pretpostavimo da je $m > 1$. Na osnovu teoreme 1.12 postoji korijena analitička funkcija $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ definisana na D. Tada je funkcija $h(z) = (z-a)\sqrt[m]{g(z)}$ dobro definisana analitička funkcija na skupu $D(a,r_1)$. Kako je $h'(a) = \sqrt[m]{g(a)} \neq 0$, prema tvrđenju 1.10, postoji krug $D(a,r_2) \subset D(a,r_1)$ na kojem je funkcija h injektivna. Na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju, $h(D(a,r_2))$ je otvoren skup, pa postoji $\rho > 0$, takvo da je $D(h(a),\rho)) \subset h(D(a,r_2))$.

Neka je $0 < \delta < \rho$, $w_0 = \delta$ i $w_k = w_0 \cdot e^{2k\pi i/m}, k = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots$. Tada, za svako $k \in \mathbb{Z}$, tačka w_k pripada skupu $h(D(a,\rho))$. Prema tome, za $k = 0,1,\ldots,m-1$, postoji tačno po jedna tačka $z_k \in D(a,r)$, takva da je $w_k = h(z_k)$. No, onda je $f(z_0) = w_0^m = \delta^m$ i, za svako takvo k je $f(z_k) = \delta^m \cdot e^{2k\pi i} = f(z_0)$. Odavde slijedi da ako je $z = a$ nula $m-1$ tog reda funkcije f', onda je funkcija f $m-$valentna.

Tvrđenje b) je direktna posljedica tvrđenja a). Teorema je dokazana. □

Teorema 1.14. *Ako je f injektivna analitička funkcija, definisana na oblasti Ω i $\Omega' = f(\Omega)$, onda je funkcija $g = f^{-1}$ analitička na Ω'. Pri tome je $g'(w) = 1/f'(z)$, gdje je $w = f(z)$.*

Dokaz. Neka je $b = f(a)$ proizvoljna tačka skupa $f(\Omega) = \Omega'$. Dokažimo da je funkcija g neprekidna u tački b. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Disk

---

[4] *Funkcija f je $n-$valentna na nekom skupu A ako za svako $w \in f(A)$ postoji tačno n različitih tačaka $z_i, i = 1,\ldots,n$ takvih da je $f(z_i) = w$. Ako je $n = 1$ onda je funkcija f univalentna.*

[5] *Ranije smo dokazali ovo tvrđenje koristeći Roucheovu teoremu (vidi tvrđenje 8.8). Ovdje je prezentovan jedan bitno drugačiji dokaz.*

poluprečnika ε sa centrom u tački a je otvoren, pa je, na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju, $f(D(a,\varepsilon))$ otvoren skup, koji pri tome sadrži tačku b. Slijedi da postoji $\delta > 0$, takvo da je $D(b,\delta) \subset f(D(a,\varepsilon))$, i dalje, da za svako w koje zadovoljava uslov $|w-b| < \delta$, postoji $z \in D(a,\varepsilon)$, takvo da je $w = f(z)$, odnosno, $z = f^{-1}(w) = g(w)$. To znači da ako je $|w-b| < \delta$, tada je $|g(w)-g(b)| = |z-a| < \varepsilon$. S obziromda je b proizvoljna tačka skupa $f(\Omega)$, slijedi da je funkcija g neprekidna na skupu $f(\Omega)$.

Dalje je

$$\frac{g(w)-g(b)}{w-b} = \frac{1}{\frac{w-b}{g(w)-g(b)}} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}.$$

Zbog neprekidnosti funkcija f i g imamo da $w \to b$ ako i samo ako $z \to a$. Zato je

$$\lim_{w\to b} \frac{g(w)-g(b)}{w-b} = \frac{1}{\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Primjetimo da, na osnovu prethodne teoreme, funkcija f' nema nula u oblasti Ω. Kako je $b \in \Omega'$ proizvoljna tačka oblasti Ω', slijedi da je funkcija $g = f^{-1}$ analitička u Ω'. $\square$

Posljedica 1.15. *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ analitička u tački z_0 oblasti D i ako je $f'(z_0) \neq 0$, tada postoji okolina $\mathcal{O}(z_0) \subseteq D$ tačke z_0, takva da je preslikavanje $f|_{\mathcal{O}(z_0)} : \mathcal{O}(z_0) \mapsto f(\mathcal{O}(z_0))$ biholomorfizam*[6].

Dokaz. Ovo tvrđenje je direktna posljedica tvrđenja 1.10 i 1.14. $\square$

Teorema 1.16. *Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ oblast u $\mathbb{C}$ i $f : D \to \mathbb{C}$. Preslikavanje f je konformno ako i samo ako je f analitička funkcija na D i $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in D$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija $f : D \to C$ analitička na D. Neka je z proizvoljna tačka skupa D. Iz analitičnosti funkcije f i uslova $f'(z) \neq 0$ slijedi da postoji okolina tačke z, takva da je f univalentna u toj okolini. Odavde slijedi je f konformno preslikavanje u z pa dakle i u D.

Obrnuto, ako je f konformno u svakoj tački oblasti D onda je (vidjeti Teoremu 1.7) funkcija f diferencijabilna u svakoj tački te oblasti, (što znači da je f analitička u D) i pri tome je $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in D$. $\square$

[6] *Preslikavanje $f\colon A \mapsto B$ je biholomorfizam ako je bijektivno i ako su f i $g = f^{-1}$ analitičke funkcije.*

Definicija 1.17. *Oblast $D \subseteq \mathbb{C}$ je konformno ekvivalentna sa oblašću $D_* \subseteq \mathbb{C}$ ako postoji preslikavanje $f : D \to D_*$ koje je konformno i bijektivno.*

Napomenimo da se može govoriti i o konformnoj ekvivalentnosti oblasti iz $\overline{\mathbb{C}}$. Primijetimo da ako je oblast D konformno ekvivalentna sa D_* i ako je $f : D \to D_*$ konformno bijektivno preslikavanje, onda je i preslikavanje $f^{-1} : D_* \to D$ konformno i bijektivno, pa je oblast D_* konformno ekvivalentna sa D. Jednostavno se pokazuje da ako je oblast D konformno ekvivalentna sa D_* a oblast D_* konformno ekvivalentna sa D_{**}, onda je oblast D konformno ekvivalentna sa D_{**}. To ukupno znači da je konformna ekvivalentnost relacija ekvivalencije. Postavlja se pitanje: kako izgledaju odgovarajuće klase ekvivalencije? U primjerima koji slijede pokazuje se da postoje oblasti koje nisu konformno ekvivalentne.

Primjer 1.18. Ako je oblast D konformno ekvivalentna sa $\mathbb{C}$ i $f : \mathbb{C} \to D$ konformno bijektivno preslikavanje, tada je f analitička na $\mathbb{C}$, pa, prema Liouvilleovoj teoremi, ne može biti ograničena. Slijedi da ograničena oblast ne može biti konformno ekvivalentna sa $\mathbb{C}$.

Primjer 1.19. Ako je D jednostruko povezana a D_* dvostruko povezana oblast, tada ove oblasti nijesu konformno ekvivalentne.

Osnovno pitanje u teoriji konformnih preslikavanja je: kako za dvije zadate oblasti D i D_* utvrditi da li su konformno ekvivalentne a zatim i kako za konformno ekvivalentne oblasti D i D_* naći preslikavanje $f : D \to D_*$ koje je konformno? Odgovori na ova pitanja nisu jednostavni. Zato se ona rješavaju parcijalno. U vezi sa prvim pitanjem, važno je prethodno utvrditi opšte principe po kojima se može ustanoviti kada su dvije oblasti konformno ekvivalentne. U dva prethodna primjera formulisana su dva negativna rezultata. Posebno važno mjesto u rješavanju ovog (prvog) pitanja ima izvanredna Riemannova teorema o konformno ekvivalentnim oblastima, koju ćemo uskoro dokazati.

Jedan od mogućih pristupa u rješavnju drugog pitanja jeste da se izuči se veliki broj posebnih slučajeva, a da se zatim u svakoj konkretnoj situaciji kombinuju izučene mogućnosti. Naravno, jedna od mogućnosti je i da se zadatak riješi približno, u određenom smislu.

Mi ćemo u nastavku izučiti nekoliko posebnih preslikavanja pa ćemo se kasnije pozivati na njih kada to bude potrebno.

Zadaci

1. Dokazati tvrđenje iz primjera 1.2.

2. Neka je $K = \{w : |w| < 1\}$, i $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Dokazati da sljedeće oblasti nijesu konformno ekvivalentne sa K:

   a) $\overline{\mathbb{C}}$; b) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$.

3. Provjeriti da li su sljedeće funkcije univalentne na ukazanim skupovima:

   (a) $f(z) = z^2$, $D = \{z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < 3\pi/2\}$;
   (b) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $D = \{z : |z| < 1\}$;
   (c) $f(z) = e^z$, $D = \{z : |z| < 3\}$;
   (d) $f(z) = z^2$, $D = \{z : 3 < |z+2| < 4,\ 0 < \arg(z+2) < 3\pi/2\}$;
   (e) $f(z) = e^z$, $D = \{z : |\operatorname{Re}((1+i)z)| < \pi\}$;
   (f) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $D = \{z : |z - i| < \sqrt{2}\}$;

4. Dokazati da je funkcija $w = z^2 + az$ univalentna na poluravni $\operatorname{Im}\ z > 0$ ako i samo ako je $\operatorname{Im}\ a > 0$.

5. Dokazati da ako je oblast $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ prosto-povezana onda su funkcije $f(z) = \log z$ i $g(z) = \sqrt[n]{z}$, definisane u teoremi 1.12, univalentne.

6. Neka je funkcija $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_2 z^2 + z$ univalentna u krugu $|z| < 1$. Dokazati sljedeće nejednakosti:

$$n|a_n| \leq 1 \quad \text{i} \quad k|a_k| \leq \binom{n-1}{k-1} \ (k = 2, \ldots, n-1).$$

   Uputstvo. Primijeniti Vietova pravila na prvi izvod funkcije.

7. Bez korišćenja teoreme o otvorenom preslikavanju dokazati da je $w = z^n$ otvoreno preslikavanje.

8. Ako je $f(z) = z^n$ i $z_0 \neq 0$, odrediti

$$\lim_{r \to +0} e^{-i\varphi} e^{i \arg(f(z_0 + re^{i\varphi}) - f(z_0))}.$$

2 Bilinearna preslikavanja

Funkcija oblika

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ gdje je } ad - bc \neq 0,$$

naziva *bilinearnom funkcijom*, ili *bilinearnim preslikavanjem* ili *Mëbiusovom transformacijom*. Ona je definisana za $z \neq -d/c$, različita je od a/c za svako $z \in \mathbb{C}$ i injektivna je u oblasti definisanosti. Ako je dodefinišemo u tački $-d/c$ sa $w(-d/c) = \infty$ i u beskonačno udaljenoj tački sa $w(\infty) = a/c$, dobijamo bijektivnu funkcija $w : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$. Kako je

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

za svako $z \in \mathbb{C}$ slijedi da je bilinearno preslikavanje konformno na $\mathbb{C}$.

Opišimo nekoliko posebnih bilineranih preslikavanja.

Primjer 2.1 (Translacija)**.** Funkcija oblika $f : z \mapsto z + a$, gdje je a kompleksan broj, je bilinearna transformacija definisana za svako $z \in \mathbb{C}$. Ako je $k_1 = S(z_0, r)$ proizvoljna kružnica, onda se funkcijom f kružnica $S(z_0, r)$ preslikava na kružnicu $k_2 = S(z_0 + a, r)$. Unutrašnjost kružnice k_1 preslikava se u unutrašnjost kružnice k_2 a spoljašnjost prve u spoljašnjost druge. Pored toga, translacija $f(z) = z + a$ preslikava pravu $z = z_0 + tb, t \in \mathbb{R}$ na pravu $z = z_0 + a + tb, t \in \mathbb{R}$.

Primjer 2.2 (Homotetija)**.** Bilinearna transformacija oblika $f(z) = \lambda z, z \in \mathbb{C}$, gdje je $\lambda > 0$, naziva se homotetijom ravni $\mathbb{C}$ sa centrom u tački 0. Homotetijom se kružnica $S(z_0, r)$ preslikava na kružnicu $S(\lambda z_0, \lambda r)$, a prava $z = z_0 + tb$ na pravu $z = \lambda z_0 + tb$.

Primjer 2.3 (Rotacija)**.** Preslikavanje $f(z) = e^{i\varphi} z$ je rotacija kompleksne ravni $\mathbb{C}$ oko tačke 0 za ugao φ. Kružnica $S(z_0, r)$ se rotacijom f preslikava na kružnicu $S(e^{i\varphi} z_0, r)$ a prava $z = z_0 + tb$ na pravu $z = e^{i\varphi} z_0 + te^{i\varphi} b$.

Primjer 2.4 (Linearna funkcija)**.** Funkcija $f(z) = az + b$ se naziva linearnom (ili afinom) funkcijom. Funkcija f može se napisati kao kompozicija rotacije, homotetije i translacije. Zbog toga f preslikava kružnice u kružnice i prave u prave.

Primjer 2.5 (Inverzija)**.** Preslikavanje $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ definisano formulom $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ (pri čemu je $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(\infty) = 0$), naziva se *inverzijom* (ili, preciznije *inverzijom u odnosu na jedinični krug*). Preslikavanje φ je očigledno bijektivno. Ono se geometrijski jednostavno interpretira: tački $z \neq 0$ i $\neq \infty$ pridružuje se tačka $w = \varphi(z)$, koja se nalazi na polupravoj koja polazi iz 0, prolazi kroz tačku $\bar{z}$, pri čemu je $|z| \cdot |w| = 1$.

Dokažimo takozvano kružno svojstvo preslikavanja φ. Neka je k kružnica u $\mathbb{C}$. Njena jednačina je

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

ili, korišćenjem kompleksne promjenljive,

$$\alpha z\bar{z} + \varepsilon z + \bar{\varepsilon}\bar{z} + \delta = 0,$$

gdje je $\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + i\gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ako je $\alpha = 0$, onda je gornja jednačina jednačina prave, odnosno, to je jednačina kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ koja prolazi kroz beskonačno udaljenu tačku. Preslikavanjem $w = \varphi(z) = \frac{1}{z}$, dobijamo jednačinu slike kružnice k,

$$\alpha\frac{1}{w\bar{w}} + \varepsilon\frac{1}{w} + \bar{\varepsilon}\frac{1}{\overline{w}} + \delta = 0,$$

odnosno

$$\delta w\bar{w} + \bar{\varepsilon}\bar{w} + \varepsilon\bar{w} + \alpha = 0.$$

To znači da je slika kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ kružnica $\overline{\mathbb{C}}$. Preciznije, slika kružnice u $\mathbb{C}$ koja ne prolazi kroz tačku 0 $(\delta \neq 0)$ je kružnica, dok je slika kružnice u $\mathbb{C}$ koja prolazi kroz 0 $(\delta = 0)$ prava. Slika prave u $\mathbb{C}$ (kružnice koji prolazi kroz tačku ∞, slučaj $\alpha = 0$) je kružnica koja prolazi kroz 0 a slika prave u $\mathbb{C}$ koja prolazi kroz nulu $(\alpha = 0, \delta = 0)$ je prava koj prolazi kroz nulu. Dakle, preslikavanje $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ svaku kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$ preslikava u kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$.

Važi sljedeća jednostavna teorema.

Teorema 2.6. *Skup svih bilinearnih preslikavanja oblika* $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0,$ *je grupa u odnosu na kompoziciju preslikavanja.*

Svaka bilinearna transformacija može se napisati kao kompozicija sljedećih preslikavanja:

a) Translacije: $z \mapsto z + a$*;*

b) Rotacije za ugao φ*:* $z \mapsto e^{i\varphi}z$*;*

c) Homotetije sa koeficijentom $r > 0$*:* $z \mapsto rz$*;*

d) Inverzije : $z \mapsto 1/z$.

Dokaz. Dovoljno je uočiti da ako su

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

i ako je $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0, a_2 d_2 - c_2 b_2 \neq 0$, onda je

$$(f_2 \circ f_1)(z) = \frac{a_2 f_1(z) + b_2}{c_2 f_1(z) + d_2} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)}.$$

Pri tome je

$$(a_2 a_1 + b_2 c_1)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (a_2 b_1 + b_2 d_1)(a_1 c_2 + c_1 d_2)$$
$$= (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - b_1 c_1) \neq 0.$$

Neutralni element je, prirodno, $e(z) = z$. Dalje, inverzno preslikavanje preslikavanja $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ definisano je formulom $z = f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{cw-a}$ i ono je takođe bilinearno. Asocijativnost je opšte svojstvo kompozicije preslikavanja.

Preslikavanje

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

možemo napisati u obliku

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = B + \frac{A}{z + \lambda},$$

gdje je

$$A = \frac{bc - ad}{c^2}, B = \frac{a}{c}, \lambda = \frac{d}{c}.$$

Odavde slijedi da je f kompozicija translacije $z \to w_1 = z + \lambda$, inverzije $w_1 \to w_2 = \frac{1}{w_1}$ i afinog preslikavanja $w_2 \to w = B + Aw_2 = B + |A|e^{i \arg A} w_2$, koje je opet kompozicija rotacije $w_2 \to w_3 = e^{i \arg A} w_2$, homotetije $w_3 \to w_4 = |A| w_3$ i translacije $w_4 \to w = w_4 + B$. Teorema je dokazana. $\square$

Svako od gornjih preslikavanja ima kružno svojstvo (svaki kružnicu i svaku pravu u $\mathbb{C}$ prevodi u kruňicu ili pravu u $\mathbb{C}$, odnosno svaku kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$ prevodi u kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$). To znači da važi

Teorema 2.7 (Kružno svojstvo bilinearnog preslikavanja)**.** *Bilinearno preslikavanje svaku kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$ prevodi u kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$.*

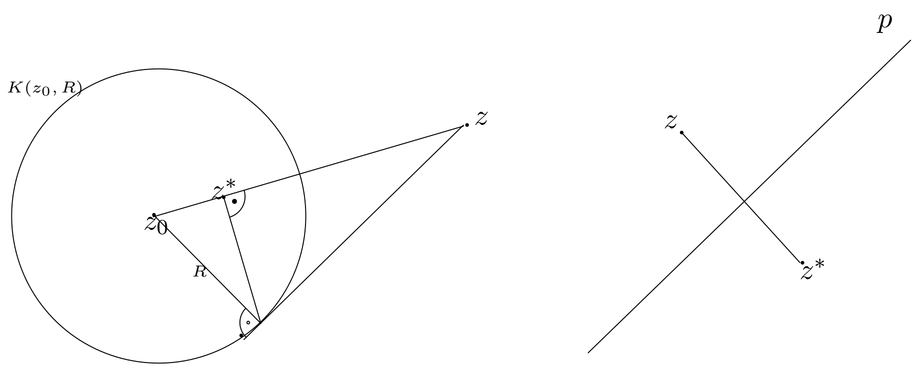
Za formulaciju drugih svojstava potrebno je uvesti novi pojam, inače poznat u geometriji.

Definicija 2.8.

1. *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na kružnicu $k(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ ako one leže na polupravoj koja polazi iz centra kružnice z_0 i pri tome važi: $|z - z_0||z^* - z_0| = R^2$.*

2. *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na pravu l ako leže na pravoj q koja je normalna na l i ako su od prave l jednako udaljene.*

Uočimo da ako se jedna od dvije simetrične tačke nalazi unutar kružnice druga je van nje. Tačka koja se nalazi na kružnici simetrična je samoj sebi u odnosu na tu kružnicu (v. sliku 4.2.



Slika 4.2: Simetrija u odnosu na kružnicu $k(z_0, R)$ i pravu p.

Sljedeći primjer daje jedno zanimljivo geometrijsko svojstvo simetrije u odnosu na kružnicu.

Primjer 2.9. Pokazaćemo da su tačke z i z^* simetrične u odnosu na kružnicu k u $\overline{\mathbb{C}}$ ako i samo ako bilo koja kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ koja prolazi kroz tačke z i z^* siječe kružnicu k pod pravim uglom.

Pretpostavimo da su tačke z i z^* simetrične u odnosu na kružnicu $k = \{\eta : |\eta - z_0| = R\}$ i da je Γ kružnica koja sadrži tačke z i z^*. Neka tangenta iz tačke z_0 na kružnicu Γ dodiruje Γ u tački z_1. Prema teoremi o dužini tangente, s obzirom da su tačke z i z^* simetrične u odnosu na k, dobijamo da je

$$|z_0 - z^*|^2 = |z_0 - z^*||z_0 - z| = R^2.$$

To znači da $z_1 \in k$, pa se k i Γ sijeku u z_1 pod pravim uglom.

Pretpostavimo sada da svaka kružnica koja prolazi kroz tačke z i z^* siječe kružnicu k pod pravim uglom. Tada tačke z i z^* leže na polupravoj koja polazi iz tačku z_0. Dalje, iz uslova ortogonalnosti slijedi da tangenta na svaku kružnicu Γ, koja prolazi kroz z i z^* sadrži poluprečnik kruga k. To znači da su tačke z‘ i z^* simetrične u odnosu na kružnicu k.

Teorema 2.10. *Tačke koje su simetrične u odnosu na kružnicu γ u $\overline{\mathbb{C}}$ bilinearnim preslikavanjem slikaju se u tačke koje su simetrične u odnosu na sliku Γ kružnice γ.*

Dokaz. Neka je f bilinearno preslikavanje, $\gamma-$ kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$, z i z^* simetrične tačke u odnosu na kružnicu γ. Neka je dalje $w = f(z)$, $w^* = f(z^*)$ i $\Gamma = f(\gamma)$. Tada je Γ kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$. Posmatramo proizvoljnu kružnicu Γ^* koja prolazi kroz tačke w i w^*. Primijetimo da je inverzna slika γ^* kružnice Γ^* takođe kružnica, koja pri tome prolazi kroz tačke z i z^* i siječe kružnicu γ pod pravim uglom. Pošto je bilinearno preslikavanje konformno, ono čuva uglove, pa se kružince Γ i Γ^* sijeku pod pravim uglom. Odavde, na osnovu prethodnog primjera, slijedi da su tačke w i w^* simetrične u odnosu na kružnicu Γ^*. □

Primjer 2.11. Oderedićemo sve bilinearne funkcije f koje trojku različitih kompleksnih brojeva (z_1, z_2, z_3) preslikavaju u trojku $(0, \infty, 1)$.

Iz uslova $f(z_1) = 0$ slijedi da je

$$f(z) = \frac{a(z - z_1)}{cz + d}.$$

Dalje, zbog, $f(z_2) = \infty$ slijedi da je

$$f(z) = \frac{a(z - z_1)}{b(z - z_2)} = \alpha\frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Iz uslova $f(z_3) = 1$ dobijamo da je $\alpha = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$. Postoji, dakle, tačno jedna bilinearna funkcija koja zadovoljava gornje uslove i to je funkcija

$$f(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Pretpostavimo sada da je jedna od tačaka z_1, z_2, z_3 beskonačno udaljena tačka.

Ako je $z_1 = \infty$, tada je tražena funkcija $f(z) = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}$. Ako je $z_2 = \infty$ onda je $f(z) = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1}$, a ako je $z_3 = \infty$ onda je $f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$.

Primjer 2.12. Pretpostavimo da su (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) trojke različitih kompleksnih b rojeva. Tada bilinearna funkcija $w = f(z)$ definisana relacijom

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

je jedina bilinearna funkcija koja zadovoljava uslove $f(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3.$

Količnik

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

naziva se *harmonijskim količnikom* ili *harmonijskim odnosom* ili *dvorazmjerom*. Dokazali smo dakle da bilinearno preslikavanje čuva harmonijski odnos.

Primjer 2.13. Pokazaćemo da bilinearna funkcija $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ donju poluravan preslikava u jedinični krug $D = \{w : |w| < 1\}$.

Ako je $\operatorname{Im} z < 0$, onda je $\operatorname{Re}(z + i) = \operatorname{Re}(z - i), |\operatorname{Im}(z + i)| < |\operatorname{Im}(z - i)|$, i tada važi

$$|w| = |f(z)| = \left|\frac{z + i}{z - i}\right| < 1.$$

Dalje, ako je $|w| < 1$ i ako je $f(z) = w$, onda je

$$\begin{aligned} z &= \frac{iw + i}{w - 1} = \frac{(iw + i)(\bar{w} - 1)}{|w - 1|^2} = \frac{iw\bar{w} + i\bar{w} - iw - i}{|w - 1|^2} \\ &= \frac{i|w|^2 - 2i^2 \operatorname{Im} w - i}{|w - 1|^2} = \frac{i|w|^2 + 2 \operatorname{Im} w - i}{|w - 1|^2}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\mathrm{Im}\ z = \frac{|w|^2 - 1}{|w-1|^2} < 0.$$

Primjer 2.14. U prethodnom primjeru imali smo bilinearnu funkciju koja preslikava donju poluravan na jedinični disk. Odredimo sva preslikavanja koja gornju poluravan preslikavaju na jedinični disk.

Neka je $z_0 \in H = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ tačka gornje poluravni koja se slika u 0. Tada se tačka $\bar{z}_0$, koja je simetrična tački z_0 u odnosu na realnu osu, slika u tačku ∞, koja je simetrična tački 0 u odnosu na kružnicu $|w| = 1$. Slijedi da sva preslikavanja o kojima je riječ imaju oblik $f(z) = k\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$. Pri tome se prava $\mathrm{Im}\ z = 0$ slika na jediničnu kružnicu $|w| = 1$. Kako je za $\mathrm{Im}\ z = 0$, $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$, to je $|k| = 1$, odnosno $k = e^{i\varphi}$.

Dokažimo da svaka funkcija oblika $f(z) = k\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $\mathrm{Im}\ z_0 > 0$, $|k| = 1$, slika gornju poluravan na jedinični krug $|w| < 1$. Neka $z = x + iy \in H$ $(y > 0)$ i

$$w = k\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \in D(0,1).$$

Tada je

$$|w| = |k|\frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}.$$

Pri tome je

$$|z - z_0|^2 - |z - \bar{z}_0|^2 = -4\,\mathrm{Re}\,(\bar{z}z_0) = -4yy_0 < 0,$$

odakle slijedi da je $|w| < 1$.

Pretpostavimo sada da je $|w| < 1$. Tada, rješavajući jednačinu

$$w = k\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

dobijamo

$$z = \frac{kz_0 - w\bar{z}_0}{k - w}.$$

Pri tome, uzimajući u obzir da je $|k| = 1$ i $|w| < 1$, imamo:

$$\begin{aligned} z = z(w) &= \frac{kz_0 - w\bar{z}_0}{k - w} = \frac{kz_0 - w\bar{z}_0}{k - w} \cdot \frac{\bar{k} - \bar{w}}{\bar{k} - \bar{w}} \\ &= \frac{z_0|k|^2 - \bar{k}w\bar{z}_0 - kz_0\bar{w} + |w|^2\bar{z}_0}{|k - w|^2} = \frac{z_0 + |w|^2\overline{z_0} - 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{k}w\bar{z}_0)}{|k - w|^2}. \end{aligned}$$

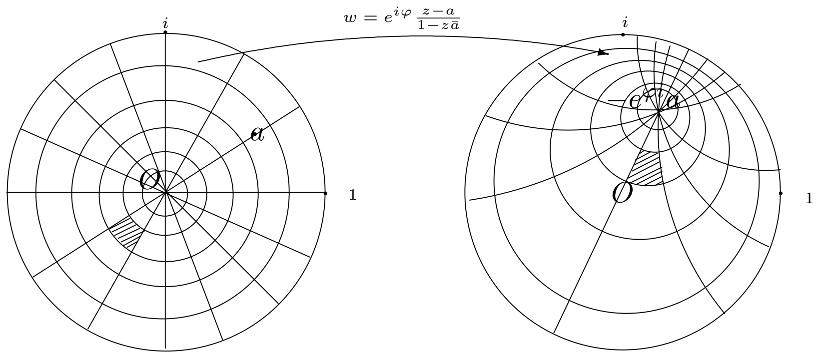
Imaginarni dio broja $z = z(w)$ jednak je

$$\text{Im } z(w) = \frac{\text{Im } z_0 + \text{Im}\,(|w|^2 \bar{z_0})}{|k-w|^2} = \frac{\text{Im } z_0(1-|w|^2)}{|k-w|^2} > 0.$$

Time je dokazano da funkcija f slika poluravan H na jedinični krug.

Kako je $|k| = 1$, to možemo pisati $k = e^{i\alpha}, \alpha \in (-\pi, \pi]$. Tako dobijamo da je opšti oblik bilinearne funkcije koja slika gornju poluravan na jedinični krug sa centrom u 0

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z_0}}, \alpha \in [0, 2\pi).$$



Slika 4.3: Konformno preslikavanje jediničnog diska na sebe.

Primjer 2.15. Dokažimo da su funkcije $w = e^{i\varphi}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ jedine Möbiusove transformacije koje preslikavaju jedinični disk na sebe.

Neka je

$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju (vidi teoremu 1.11) slijedi da analitička funkcija granicu neke oblasti preslikava na granicu slike te oblasti. Zato je $|w| = \left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right| = 1$ ako i samo ako $|z| = 1$, odnosno $|ae^{i\varphi} + b|^2 = |ce^{i\varphi} + d|^2$ za svako $\varphi \in [0, 2\pi)$. Kvadrirajući prethodnu jednakost dobijamo

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(a\overline{b}e^{i\varphi}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(c\overline{d}e^{i\varphi}).$$

Stavljajući $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$ i sabirajući tako dobijene jednakosti imamo: $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$. Odavde slijedi da je $\mathrm{Re}\,((a\overline{b} - c\overline{d})e^{i\varphi}) = 0$ za svako φ. Neka je $a\overline{b} - c\overline{d} = \rho \cdot e^{i\psi}$. Stavljajući $\varphi = -\psi$, dobijamo $\mathrm{Re}\,(\rho e^{i(\psi-\psi)}) = 0$ odnosno $\rho = 0$ i $a\overline{b} = c\overline{d}$. Iz tri uslova $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$, $a\overline{b} = c\overline{d}$ i $ad \neq bc$, slijedi da ako je $b = 0$, tada je $c = 0$, $|a| = |d| \neq 0$, i preslikavanje $w = f(z)$ ima oblik

$$w = \frac{a}{d}z = e^{i\varphi}\frac{z-0}{1-\overline{0}z}.$$

Ako je $b \neq 0$ i $s = \frac{d}{b}$, tada je $d = bs$ i $a = c\overline{s}$, odakle slijedi da je $(|s|^2 - 1)(|c|^2 - |b|^2) = 0$ i $0 \neq ad - bc = bc|t|^2 - bc = bc(|t|^2 - 1)$. To dalje znači da je $|s| \neq 1$, pa je $|b| = |c$ i $|a| = |d|$. Na kraju dobijamo da je

$$w = \frac{a}{d}\frac{z + \frac{b}{a}}{1 + z\frac{c}{d}} = e^{e\varphi}\frac{z+\alpha}{1+z\overline{\alpha}}.$$

Pri tome, ako $|\alpha| < 1$, tada je $|w| = |f(z)| < 1$ ako i samo ako je $|z| < 1$, a ako je $|\alpha| > 1$, tada je $|w| = |f(z)| < 1$ ako i samo ako je $|z| > 1$,

Na slici 4.3 prikazano je kako se koncentrični krugovi (kružnice) i dijametri jediničnog kruga slikaju u krugove (kružnice) i lukove kružnica ortogonalnih na jediničnu kružnicu.

Primjer 2.16. Odredićemo sve Möbiusove transformacije

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0,$$

koje slikaju gornju poluravan $H = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ na sebe.

Neka je $a = \alpha e^{i\varphi}$, $b = \beta e^{i\eta}$, $c = \gamma e^{i\psi}$, $d = \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \varphi, \eta, \psi, \theta < \pi$. Pošto je $f(\partial H) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, to je za svako $r \in \mathbb{R}$, slika

$$\frac{ar+b}{cr+d} = \frac{(ar+b)(\overline{c}r+\overline{d})}{|cr+d|^2} \in \mathbb{R}.$$

To znači da je $p(r) = a\bar{c}r^2 + (b\bar{c} + a\bar{d})r + b\bar{d}$ polinom sa realnim koeficijentima, pa su i izvodi $p'(r) = 2a\bar{c}r + b\bar{c} + a\bar{d}$ i $p''(r) = 2a\bar{c}$ polinomi sa realnim koeficijentima. Slijedi da $a\bar{c} \in \mathbb{R}$, $b\bar{c} + a\bar{d} \in \mathbb{R}$ i $b\bar{d} \in \mathbb{R}$. Iz uslova $a\bar{c} = \alpha\gamma e^{i(\varphi-\psi)} \in \mathbb{R}$ slijedi $\varphi = \psi$, a slično se dobija da je $\eta = \theta$. Tada je $bc - ad = (\beta\gamma - \alpha\delta)e^{i(\varphi+\eta)} \neq 0$ ako i samo ako je $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$. Dalje je

$$b\bar{c}+a\bar{d} = \beta\gamma e^{i(\eta-\varphi)}+\alpha\delta e^{i(\varphi-\eta)} = (\beta\gamma-\alpha\delta)e^{i(\eta-\varphi)}+2\alpha\delta\cos(\eta-\varphi) \in \mathbf{R}.$$

Odavde slijedi da je $\eta = \varphi$. Zaključujemo da je

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

Iz uslova

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\, w(i) &= \operatorname{Im}\left(\frac{(\alpha i + \beta)(-\gamma i + \delta)}{|\gamma i + \delta|^2}\right) \\ &= \frac{1}{|\gamma i + \delta|^2}(\alpha\delta - \beta\gamma) > 0, \end{aligned}$$

dobijamo neophodan i dovoljan uslov da je slika $f(H)$ gornje poluravni ista poluravan H: $\alpha\delta - \beta\delta > 0$.

Primjer 2.17. Neka je $D = \{z : \operatorname{Im}\, z < 0, |z + il| > R\}$, gdje je $l > R > 0$. Odredimo bilinearnu funkciju koja konformno i bijektivno slika D na neki koncentrični prsten sa centrom u tački 0.

Treba naći par tačaka koje su simetrične i u odnosu na pravu $\operatorname{Im}\, z = 0$ i u odnosu na kružnicu $|z + il| = R$. Taj par se mora nalaziti na imaginarnoj osi. Neka su to tačke $z_1 = ai$ i $z_2 = -ai, a > 0$.

Iz simetrije u odnosu na kružnicu slijedi da je $(l + a)(l - a) = R^2$, pa je $a = (l^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}$. Slika prave $\operatorname{Im}\, z = 0$ je kružnica γ_1 poluprečnika r_1 a slika kružnice $|z + il| = R$ je kružnica γ_2 poluprečnika r_2. Pošto slike w_1 i w_2 tačaka z_1 i z_2 moraju biti simetrične u odnosu na γ_1 i γ_2 istovremeno, to je $w_1 = 0, w_2 = \infty$, ili obrnuto. Tada preslikavanje

$$f(z) = A\frac{z - ai}{z + ai}$$

prevodi pravu $\operatorname{Im}\, z = 0$ u kružnicu γ_1. Kako je $f(0) = -A$, to je $|A| = r_1$. Slika kružnice $|z + il| = R$ je kružnica $|w| = r_2$ poluprečnika

$$r_2 = |A|\frac{|R - l - a|}{R + l + a} < |A| = r_1.$$

Po principu korespondencije granica slijedi da je slika oblasti D oblast $D' = \{w : r_2 < |w| < r_1\}$. Primijetimo da količnik $r_1/r_2 = R + l + a/|R - l - a|$ ne zavisi od A.

Bilinearnim preslikavanjima, za koja se može reći da su prilično jednostavna, može se uspostaviti konformna i bijektivna veza između različitih oblasti. To je jedan od razloga za njihovo detaljno izučavanje. U tvrđenju sljedeće teoreme nalazi se još jedno objašnjenje značaja bilineranih preslikavanja.

Teorema 2.18. *Ako $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ konformno i bijektivno preslikava $\overline{\mathbb{C}}$ na $\overline{\mathbb{C}}$, onda je f bilinearno preslikavanje.*

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da postoji tačka $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ koja se slika u ∞.

Pretpostavimo prvo da je $z_0 \in \mathbb{C}$. Tada je tačka $z = z_0$ pol funkcije f, pa je,

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_0)^i, z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

pri čemu je $c_{-n} \neq 0$, Funkcije $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$ i $b(z) = f(z)(z - z_0)^n$, $b(z_0) = c_n$ su analitičke u tački z_0, pri čemu je $b(z_0) = c_n \neq 0$. Odavde slijedi da je i funkcija $h(z) = 1/f(z) = (z - z_0)^n/b(z)$, $h(z_0) = 0$, analitička u z_0.

Prema pretpostavci teoreme, preslikavanje f je konformno u z_0, pa je i preslikavanje h konformno u toj tački. To znači da je $h'(z_0) \neq 0$, pa iz

$$h'(z) = \frac{n(z - z_0)^{n-1}}{b(z)} + (z - z_0)^n \frac{b'(z)}{b^2(z)},\ h'(z_0 = \frac{n(z_0 - z_0)^{n-1}}{b(z_0)}$$

slijedi da je $n - 1 = 0$ i $n = 1$. To znači da je z_0 prosti pol funkcije f, pri čemu je f diferencijabilna za svako $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Tada je funkcija $g(z) = f(z) - \frac{c_{-1}}{z - z_0}$ analitička u $\overline{\mathbb{C}}$, koja je pri tome ograničena na $\mathbb{C}$. Prema Liouvilleovoj teoremi je $g(z) \equiv \mathrm{const}$, odakle slijedi da je f bilinearna funkcija.

Ako je pak $z_0 = \infty$, onda je f cijela funkcija. Slijedi da $|f(z)| \to \infty$ kada $|z| \to \infty$. Beskonačno udaljena tačka je prosti pol funkcije f, pa je $f(z) = az + b$. □

Zadaci

1. Funkcijom $w = 1/\overline{z}$ preslikati

   a) krug $|z| < 1$; b) pravu $y + x = 1$; c) oblast $D = \{z : |z-1| > 1,\ |z-3| > 1,\ |z-2| < 2\}$.

2. Dokazati da je svaka bilinearna transformacija bijekcija proširene kompleksne ravni.

3. Dokazati da grupa bilinearnih preslikavanja nije komutativna.

4. Odrediti Möbiusovu transformaciju koja trojku $0, i, -2$ preslikava u trojku $i, 2, 0$.

5. Odrediti Möbiusovu transformaciju, koja preslikava gornju poluravan na unutrašnjost jediničnog diska i koja tačku i slika u 0 a tačku ∞ u -1.

6. Odrediti Möbiusovu transformaciju koja tačke: $i, -i, 1$ preslikava redom u tačke $0, 2, \infty$.

7. Dokazati da funkcija
   $$w = \frac{az+b}{cz+d}$$
   ima jednu fiksnu tačku ako i samo ako je $(d+a)^2 = 4(ad-bc) \neq 0$.

8. Dokazati da svako konformno preslikavanje f, koje preslikava jedinični disk na sebe, u proširenoj kompleksnoj ravni ima tačno dvije fiksne tačke. Odrediti proizvod izvoda preslikavanja f u tim tačkama.

9. Dokazati da bilinearna funkcija različita od identiteta ima najviše dvije nepokretne tačke u $\overline{\mathbb{C}}$.

10. Dokazati da za svake dvije kružnice γ i Γ u $\overline{\mathbb{C}}$ postoji tačno jedna bilinearna funkcija f, takva da je $f(\gamma) = \Gamma$ i tri fiksirane tačke iz γ preslikava u tri fiksirane tačke iz Γ.

11. Dokazati da su dvije bilinearne transformacije komutativne ako i samo ako imaju iste fiksne tačke.

12. Dokazati da za svaku trojku (w_1, w_2, w_3) različitih kompleksnih brojeva postoji tačno jedna bilinearna funkcija f takva da je $f(0) = w_1, f(\infty) = w_2, f(1) = w_3$. Naći odgovarajuću formulu.

13. Neka je $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bilinearno preslikavanje. Naći sliku

    a) prave $\mathrm{Re}\,(\lambda z) = \alpha$ koja ne prolazi kroz tačku tačku $z = \frac{-d}{c}$.

    b) Prave $\mathrm{Re}\,(\lambda z) = -\mathrm{Re}\,(\lambda \frac{d}{c})$ (koja prolazi kroz tačku $z = \frac{-d}{c}$).

    c) Kružnice koja ne prolazi kroz tačku $z = \frac{-d}{c}$.

    d) Kružnice $|z - z_0| = |z_0 + \frac{d}{c}|$ (koja prolazi kroz tačku $z = \frac{-d}{c}$).

14. Ako su z_1, z_2, z_3, z_4 različite tačke, onda se količnik

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

    naziva dvorazmjerom tačaka z_1, z_2, z_3, z_4. Dokazati:

    a) Ako je φ Möbiusova transformacija i $z_2 = \varphi^{-1}(1)$, $z_3 = \varphi^{-1}(0)$, $z_4 = \varphi^{-1}(\infty)$, tada je

$$\varphi(z) = (z, z_1, z_2, z_3, z_4).$$

    b) Dvorazmjera $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ ako i samo ako tačke z_1, z_2, z_3, z_4 pripadaju jednoj kružnici ili jednoj pravoj.

    c) Ako je w Möbiusova transformacija koja preslikava trojku (z_1, z_2, z_3) u trojku (w_1, w_2, w_3), tada važi:

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} : \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

15. Odrediti skup tačaka koji se preslikavanjem

    a) $w = \dfrac{z + 2i}{2iz - 1}$ preslikava u skup $\{w : |w| > 1\}$;

b) $w = \dfrac{2z}{z-1}$ preslikava u skup $\{w : |w-1| > 1\}$;

c) $2\dfrac{w-1}{w+1} = \dfrac{z-1}{z+1}$ preslikava u skup $\{w : \mathrm{Re}\ w > 0\}$;

d) $w = \dfrac{2z+1}{z-2}$ preslikava u skup $\{w : 1 < 2|w| < 2\}$;

e) $w = i\dfrac{1-z}{z+1}$ preslikava u skup $\{w : \mathrm{Re}\ w > 0, \mathrm{Im}\ w - m\,\mathrm{Re}\ w > 0\}$ $(m \geq 0)$;

f) $w = \dfrac{z}{1-z}$ preslikava u skup $\{w : 0 < \arg < \frac{\pi}{4}\}$.

16. Odrediti sve Möbiusove transformacije w koje zadovoljavaju uslov $w \circ w = \mathrm{id}$.

17. Funkcija
$$w = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}},\ z_0 = \alpha + i\beta,\ \beta > 0,$$
preslikava gornju poluravan na jedinični krug.

a) Odrediti $\theta(x) := \arg w(x)$, ako $x \in \mathbb{R}$.

b) Odrediti $w'(z_0)$.

c) Ocijeniti ponašanje modula prvog izvoda u zavisnosti od z_0 i odrediti kada (na kojim skupovima i za koje z_0) funkcija w udaljava a kada približava tačke.

18. Dokazati da

a) funkcija $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ lijevu poluravan preslikava u jedinični krug $\gamma = \{w : |w| < 1\}$;

b) funkcija $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ desnu poluravan preslikava u jedinični krug $\gamma = \{w : |w| < 1\}$.

19. Oblast D preslikati bilinernom funkcijom $w = f(z)$ ako je

a) $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$, $D = \{z : |z| < 1, \mathrm{Re}\ z > 0\}$;

b) $f(z) = \dfrac{z-2i}{z}$, $D = \{z : |z-1| < 1, \mathrm{Re}\ z > 0\}$;

a) $f(z) = \dfrac{z-1-i}{z+1-i}$, $D = \{z : |z-i| < 1, |z| < \sqrt{2}\}$.

20. Dokazati da je f konformno preslikavanje neke poluravni ili kruga na neku drugu poluravan ili krug ako i samo ako je f Möbiusova transformacija.

3 Elementarne funkcije i konformna preslikavanja

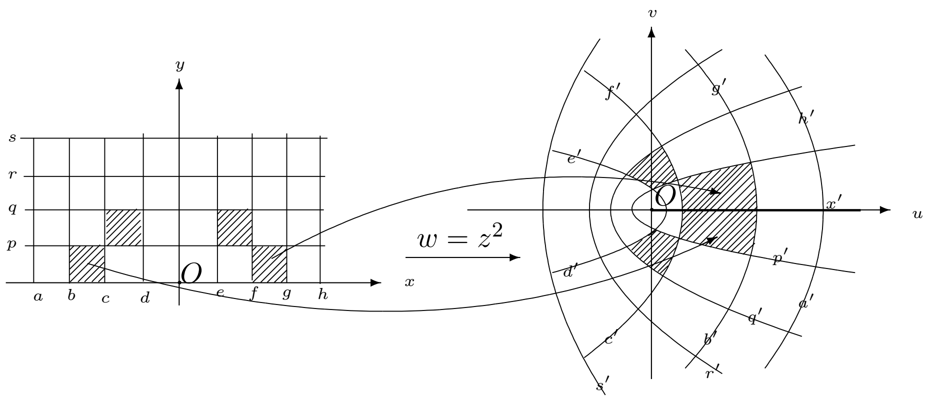
U ovom dijelu razmotrićemo konformna preslikavanja definisana nekim elementarnim funkcija koje nijesu bilinearne. Neke karakteristične situacije opisaćemo detaljno, dok ćemo druge ostaviti u obliku zadataka.

Primjer 3.1 (Kvadratna funkcija)**.** Peslikavanje $f(z) = z^2, z \in \mathbb{C}$, je konformno u svakoj oblasti koja ne sadrži tačku 0 i jednolisno u svakoj oblasti koja ne sadrži dvije različite tačke z_1 i z_2 za koje je $z_1 = -z_2$. Dakle, funkcija $f(z) = z^2$ preslikava oblast D konformno i bijektivno na oblast $D' = f(D)$ ako i samo ako oblast D ne sadrži nijedan par tačaka simetričnih u odnosu na tačku $z = 0$. Ako je $z = re^{i\varphi}$ onda je $w = z^2 = r^2 e^{2i\varphi}$. Zato kvadratna funkcija udvostručava ugao i kvadrira modul. Kvadratnom funkcijom prave i kružni lukovi preslikavaju se u prave, kružne lukove ili parabole. Preciznije:

a) Poluprava $\arg z = \alpha$ slika se na polupravu $\arg w = 2\alpha$.

b) Kružni luk $\{z : |z| = \rho, \alpha \leq \arg z \leq \beta, 0 < \beta - \alpha < \pi\}$ preslikava se na kružni luk $\{w : |w| = r^2, 2\alpha \leq \arg w \leq 2\beta\}$.

c) Odredimo slike koordinatnih linija Re $z = c$ i Im $z = c$, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Ako je $z = x+iy, w = u+iv$, onda je $w = u+iv = z^2 = x^2-y^2+2xyi$, pa je $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. Ako je $x = c, -\infty < y < +\infty$, onda je $v^2 = 4c^2(u + c^2)$. To znači da je slika prave Re $z = c\,(\neq 0)$ parabola sa tjemenom u tački $(-c^2, 0)$ i žižom u tački $(c^2, 0)$. Slika prave Re $z = 0$ je poluprava $(-\infty, 0]$, pri čemu za svaku tačku w sa ove poluprave postoje dvije tačke z_1 i z_2 sa prave Re $z = 0$ za koje je $f(z_1) = f(z_2) = w$. Slično se određuje slika prave Im $z = c$ - to je takođe parabola ili poluprava, zavisno od toga da li je $c = 0$ ili je $c \neq 0$. Na slici 4.4 prikazana je korespondencija između pravih i odgovarajućih parabola.



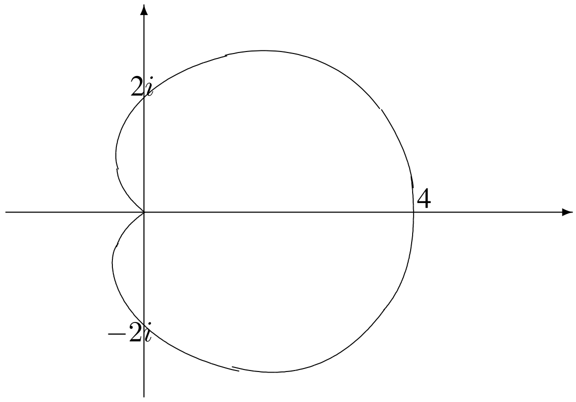
Slika 4.4: Preslikavanje gornje poluravni kvadratnom funkcijom.

d) Kružni sektor $\{z : r < |z| < R, \alpha < \arg z < \beta\}$, gdje je $0 \leq r < R \leq +\infty, 0 < \alpha \leq \pi$ slika se na sektor $\{w : r^2 < |w| < R^2, 2\alpha < \arg w < 2\beta\}$

e) Ako je p prava $y = ax + b$, tada iz $u = x^2 - y^2$ i $v = 2xy$ slijedi da je za $z = x + iy \in p$, $w = f(z) = x^2 - (ax+b)^2 + 2(ax+b)xi$; ako je pri tome $b = 0$, onda je $f(p) = \{(x^2((1 - a^2) + i(2a)) : x \in \mathbb{R}\}$ poluprava; ako je pak $a = 0, b \neq 0$, onda je, na osnovu c), $f(p)$ parabola. Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Tada, ako je $\varphi = \operatorname{arctg} a$, rotacija $z \mapsto e^{-i\varphi}z$ preslikava pravu p u pravu $q = e^{i\pi/2 - i\varphi}p = \{z : x = \frac{|b|}{\sqrt{1+a^2}}\}$ koja je paralelna $y-$osi. Zbog toga je $f(p) = f(e^{i\varphi - i\pi/2}q) = -e^{2i\varphi}f(q)$. Kako je $f(q)$ parabola sa tjemenom u tački $(-\frac{b^2}{1+a^2}, 0)$ i žižom u tački $(\frac{b^2}{1+a^2}, 0)$, slijedi da je $f(p)$ takođe parabola sa tjemenom u tački $e^{2i\varphi}\frac{b^2}{1+a^2}$ i žižom $-e^{2i\varphi}\frac{b^2}{1+a^2}$.

f) Kružnica $|z - 1| = 1$ preslikava se na kardioidu (v. sliku 4.5) $\{w = z^2 : |z-1| = 1\} = \{w = (1 + e^{it})^2 : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{1 + 2\cos t + \cos 2t + i(2\sin t + \sin 2t)\}$.

Primjer 3.2. Pokazaćemo, na jednom prostom primjeru, kako se mogu kombinovati preslikavanja koja smo izučavali. Odredićemo preslikavanje



Slika 4.5: Kardioida.

koje oblast desni polukrug jediničnog kruga $D = \{z : |z| < 1, \mathrm{Re}\ z > 0\}$ konformno slika na gornju poluravan.

Prvo preslikavanjem $g_1(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ oblast D slika u treći kvadrant, a zatim, koji se kvadratnom funkcijom slika na gornju poluravan. Dakle, preslikavanje

$$f(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 = \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 + 2iz - 1}$$

slika oblast D na gornju poluravan.

Primjer 3.3 (Korijena funkcija)**.** Funkcija $w = f(z) = \sqrt{z}$ je inverzna funkciji $w = z^2$. Ona je analitička u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. U ravni $\mathbb{C}$ sa rezom koji spaja tačku $z = 0$ i beskonačno udaljenu tačku, inverzna funkcija funkcije $w = z^2$ definiše dvije analitičke grane. Ako je $z = \rho e^{i\varphi} \neq 0$, onda je $f(z) = \pm\sqrt{\rho}e^{i\varphi/2}$. Odavde slijedi da se korijenom funkcijom ugao prepolovi a radijus "korenuje". Na primjer, funkcijom $f(z) = \sqrt{z}$

1. poluravan $\mathrm{Re}\ z > 0$ preslikava se na ugao $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

2. ugao $\alpha < \arg z < \beta$ slika se na ugao $\alpha/2 < \arg z < \beta/2$;

3. jedinični krug sa rezom $[-1, 0]$ slika se na polukrug $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\ z > 0$;

4. Ravan $\mathbb{C}$ sa rezom po negativnim realnim brojevima slika se na desnu poluravan;

5. Kardioida se slika na kružnicu $|z-1|=1$, a unutrašnjost kardioide na disk $|z-1|<1$.

6. Sektor $\{z : r < |z| < R, \alpha < \arg z < \beta\}$ slika se na sektor $\{z : \sqrt{r} < |z| < \sqrt{R}, \alpha/2 < \arg z < \beta/2\}$.

Primjer 3.4 (Stepena funkcija)**.** Posmatraćemo preslikavanje $w = z^\lambda$, uz dopunsku pretpostavku da je $\lambda > 0$ i tada ćemo podrazumijevati da je $w = z^\lambda = |z|^\lambda e^{i\lambda \arg z}$. Funkcija $f(z) = z^\lambda$ je univalentna u sektoru $\{z : 0 < \arg z < \alpha\}$, gdje je $\alpha \leq 2\pi/\lambda$, i ovaj sektor preslikava na sektor $\{z : 0 < \arg z < \alpha\lambda\}$. Ako je, na primjer, oblast D, koju treba preslikati konformno na gornju poluravan, ograničena kružnim lukovima γ_1 i γ_2 koji se sijeku u tačkama z_0 i z_1 pod uglom α, (takva oblast liči na mjesec), tada preslikavanje

$$g(z) = \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

slika oblast D na ugao $D_1 = \{z : \beta < \arg z < \beta + \alpha$. Prvo rotacijom za ugao β (u smjeru kretanja kazaljke na satu) a zatim stepenom funkcijom stepena π/α ova oblast se preslikava na gornju poluravan. Traženo preslikavanje realizuje se funkcijom oblika

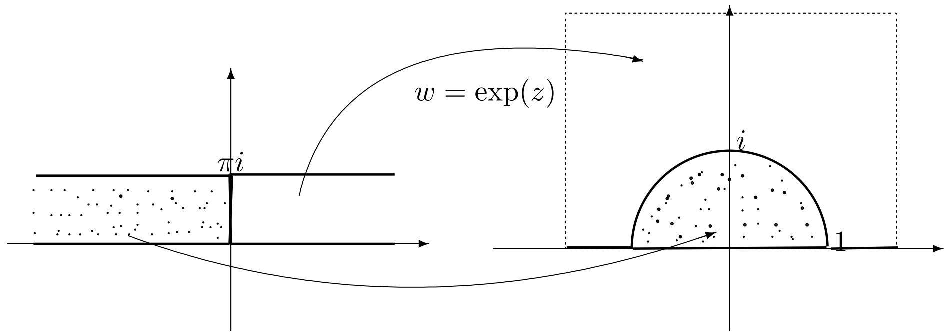
$$f(z) = \left(\frac{z - z_0}{z - z_1 e^{-i\beta}}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Primjer 3.5 (Eksponencijalna funkcija)**.** Preslikavanje $f(z) = e^z$ je konformno u $\mathbb{C}$, ($f'z) = e^z \neq 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$) ali nije jednolisno na $\mathbb{C}$. Preciznije, gornje preslikavanje je jednolisno u oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ ako i samo ako D ne sadrži dvije različite tačke z_1 i z_2, takve da je $z_1 - z_2 = 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Specijalno, funkcija $f(z) = e^z$ konformno i bijektivno preslikava traku $\{z : -\pi < \mathrm{Im}\ z < \pi\}$ na ravan $\mathbb{C}$ sa rezom $(-\infty, 0]$.

1. Ako je $D(k) = \{z \in \mathbb{C} : 2k\pi - \pi \leq \mathrm{Im}\ z < 2k\pi + \pi\}, k \in \mathbb{Z}$, tada je funkcija $w = e^z$ univalentna na $D(k)$. Ako je $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ onda je

$$w = |w|e^{i \arg w} = e^{\log |w|} e^{i \arg w},$$

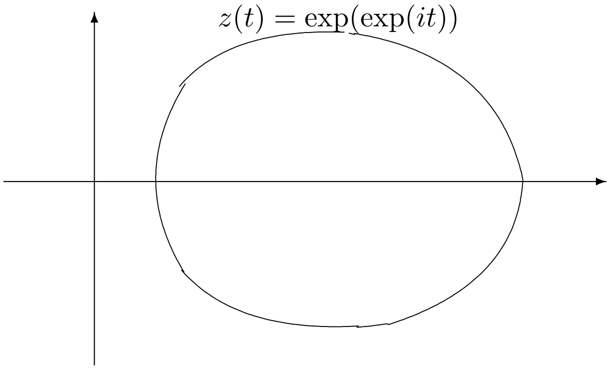
gdje je $\arg w \in (-\pi, \pi]$. Odavde slijedi da za $z = \log|w| + i \arg w \in D_k$ važi $e^z = w$. Dakle, $g(D(k)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Istovremeno je slika skupa $\mathrm{Int} D(k) = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\ z < (2k+1)\pi\}$ kompleksna ravan sa rezom po negativnom dijelu realne ose.



Slika 4.6: Preslikavanje horizontalne trake i polutrake eksponencijalnom funkcijom.

2. Neka je $z \in D = \{z : 0 < \text{Im } z < \pi\}$. Tada je $w = e^z = e^x e^{iy}$. Pa je $\arg w = y \in (0, \pi)$ i $0 < |w| < \infty$. Prema tome $f(D) = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Dakle, slika polazne trake je gornja poluravan.
3. Ako je $D = \{z : \alpha < \text{Im } z < \pi + \alpha\}$, onda je $f(D)$ poluravan $\text{Im}\,(z \cdot e^{-i\alpha}) > 0$, ili eksplicitnije to je poluravan $y \cos\alpha - x \sin\alpha > 0$.
4. Polutraka $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z < 0\}$ preslikava se na polukrug $\{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.
5. Polutraka $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0\}$ preslikava se na skup $\{z : |z| > 1, \text{Im } z > 0\}$ (vidi sliku 4.6).
6. Imaginarna osa se preslikava na jediničnu kružnicu.
7. Realna osa se preslikava na pozitivni dio realne ose.
8. Slika jedinične kružnice je zatvorena kriva koja leži u desnoj poluravni, simetrična je u odnosu na $x-$osu i sadrži tačke e^{-1} i e^1 (vidi sliku 4.7).

Primjer 3.6. Odredićemo funkciju koja konformno i bijektivno preslikava $\{z : |z| > 1, \text{Im } z < 1\}$ na gornju poluravan. Prvo, bilinearnim preslikavanjem preslikaćemo pravu $l : \text{Im}\, z = 1$, tj. $z = x + i, x \in \mathbb{R}$ u



Slika 4.7: Slika jedinične kružnice eksponencijalnom funkcijom.

pravu, a kružnicu $k : |z| = 1$ u pravu, ali tako da ove prave (slika prave l i slika kružnice k) budu paralelne. Njihova zajednička tačka $z = i$ slika se u beskonačno udaljenu tačku, a to se postiže preslikavanjem $w_1 = f(z) = \frac{1}{z-i}$. Tada je slika prave l realna osa $l_1 : \operatorname{Im} z = 0$, dok je slika kružnice $|z| = 1$ prava $l_2 : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$. To znači da se data oblast slika u traku omeđ enu pravama $l_1 : \operatorname{Im} z = 0$ i $l_2 : \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$.

Preslikavanjem $w = e^{2\pi w_1} = e^{\frac{2\pi}{z-i}}$ data oblast slika se na gornju poluravan.

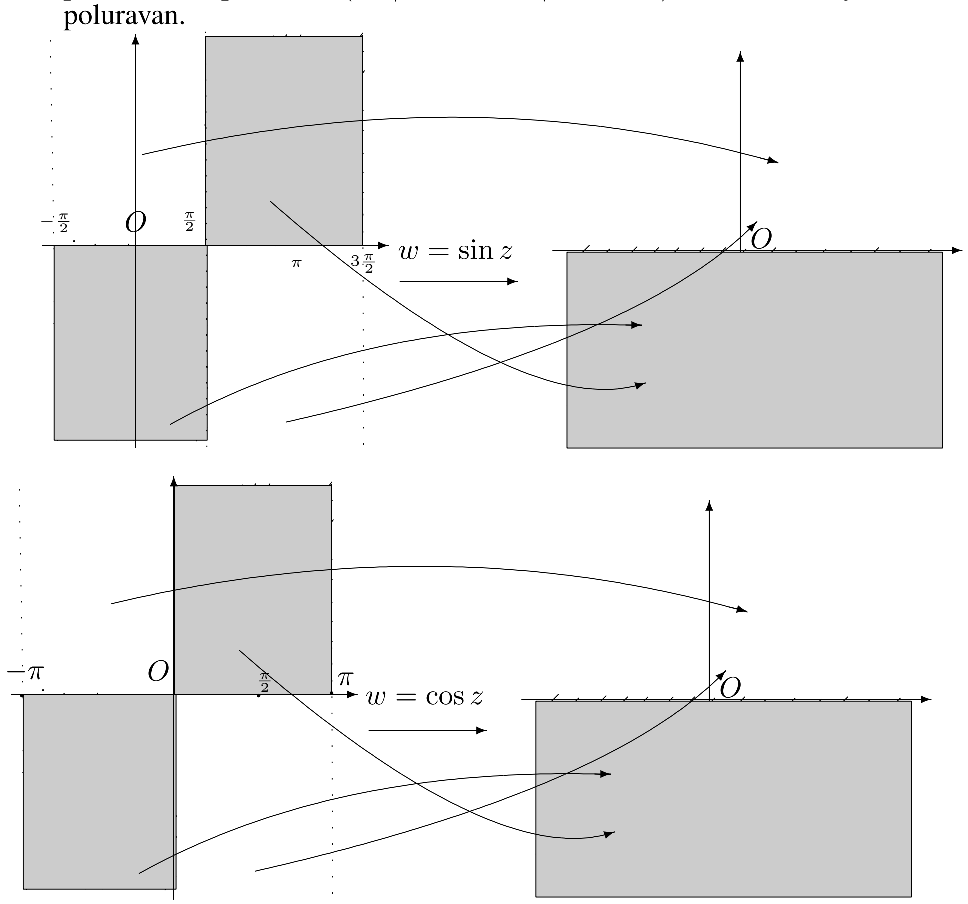
Primjer 3.7 (Trigonometrijske funkcije)**.** 1. Dokažimo da funkcija $w = \sin z$ preslikava polutraku $\{z : -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2)\}$ na gornju poluravan. Koristimo formulu

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}.$$

Preslikavanjem $z \mapsto \sin z$ duž γ_1 slika se u duž$\Gamma_1 = [-1, 1]$, a prava

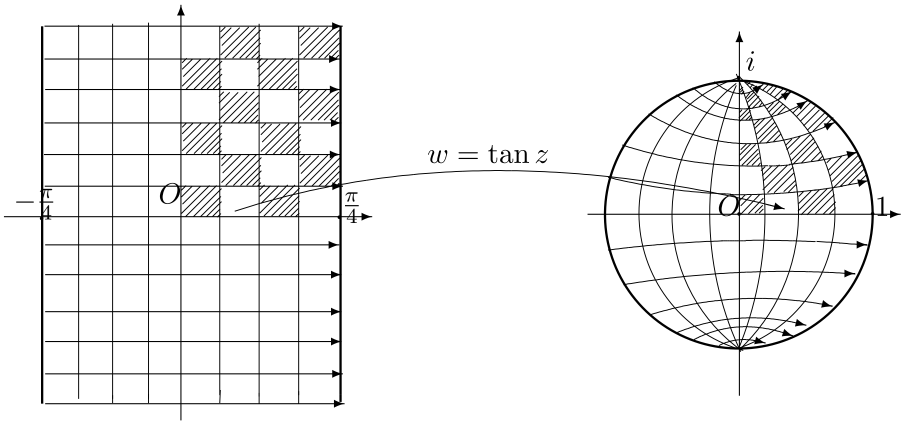
$$\gamma_2 = \{z : z = \pi/2 + iy, y \in \mathbb{R}\}$$

u polupravu $\Gamma_2 = \{\sin z : z = \pi/2 + iy, y \in \mathbb{R}^+\} = \{\cos iy = (e^y + e^{-y})/2 : y \in \mathbb{R}^+\} = [1, +\infty)$. Slično se dobija da se prava $\gamma_3 = \{z : z = -\pi/2 + iy, y \in \mathbb{R}^+\}$ slika u polupravu $\Gamma_3 = (-\infty, -1]$. Vodeći računa o tome da je $\sin i = i(e^{-1} - e)/2$, slijedi da se polutraka iznad γ_1 i između γ_2 i γ_3 slika na gornju poluravan. S obzirom da je f neparna i periodična sa periodom 2π funkcija, slijedi da ona f preslikava polutrake oblika $(-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi)\times\mathbb{R}^+$ na gornju poluravan, a polutrake $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) \times \mathbb{R}^-$ na donju poluravan.



Slika 4.8: Preslikavanje vertikalnih polutraka funkcijama $w = \sin z$ i $w = \cos z$.

2. Kako je $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ slijedi da se funkcijom $z \mapsto \cos z$ polutrake $(2k\pi, \pi+2k\pi)\times\mathbb{R}^+$ preslikavaju u donju poluravan a polutrake $(2k\pi, \pi + 2k\pi) \times \mathbb{R}^-$ u gornju poluravan (vidi sliku 4.8).



Slika 4.9: Preslikavanje vertikalnih polutraka funkcijom $w = \tan z$.

3. Iz jednakosti

$$w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = -i + \frac{2i}{e^{2iz} + 1}$$

slijedi da se funkcija $w = \tan z$ može napisati kao kompozicija sljedećih elementarnih funkcija: $g_1(z) = 2iz$, $g_2(z) = e^z$, $g_3(z) = -i\dfrac{z-1}{z+1}$.

Ako je $D = \{z : -\pi/4 < \text{Re } z < \pi/4\}$, tada se preslikavanjem g_1 traka D preslikava u traku $D_1 = \{z : -\pi/2 < \text{Im } z < \pi/2\}$, koja se dalje preslikavanjem g_2 slika na desnu poluravan. Na kraju, bilinearnim preslikavanjem desna poluravan slika se na jedinični disk (vidi sliku 4.9). To znači da funkcija $f(z) = \tan z$ slika oblast D na jedinični disk.

Primjer 3.8 (Logaritamska funkcija)**.** O funkciji koja je inverzna funkciji

$$f(z) = e^z$$

govorili smo ranije. Zaključili smo da je ta funkcija višeznačna, a ako napravimo rez $(-\infty, 0]$, onda se ona grana na beskonačno mnogo analitičkih grana:

$$(\text{Log}\, z)_k = \log|z| + i \arg z + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

pri čemu je $-\pi < \arg z \leq \pi$. Funkcija $w = \log z := \log|z| + i\arg z$ preslikava

1. gornju poluravan na traku $0 < \text{Im } z < \pi$;
2. donju poluravan na traku $-\pi < \text{Im } z < 0$;
3. desnu poluravan na traku $-\pi/2 < \text{Im } z < \pi/2$.
4. ugao $\alpha < \arg z < \beta$ ($-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$) na traku $\alpha < \text{Im } z < \beta$.

Napomenimo da ako izaberemo neku drugu granu logaritamske funkcija, onda imamo sličnu situaciju.

Primjer 3.9 (Funkcija Žukovskog)**.** Funkcija $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ naziva se funkcijom Žukovskog. Ona je analitička u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tačke $z = 0$ i $z = \infty$ su polovi prvog reda ove funkcije. Pri tome je $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$, odakle slijedi da preslikavanje definisano funkcijom Žukovskog konformno u svakoj tački $z \neq \pm 1$. Odredimo u šta se slikaju neki skupovi preslikavanjem Žukovskog.

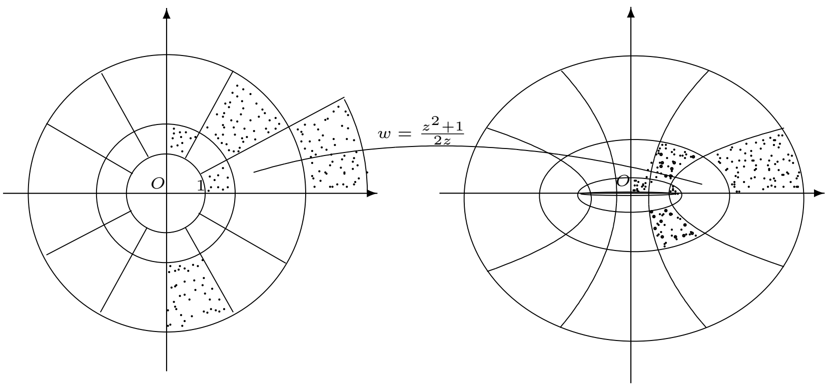
1. Neka je $K = \{z : |z| = r\}$. Ako je $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = re^{i\varphi}, (r > 0$ fiksirano, $0 \leq \varphi < 2\pi)$, kružnica, onda je $u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi, v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi$, a to su parametarske jednačine elipse sa centrom u 0 i poluosama $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}), b = \frac{1}{2}|r - \frac{1}{r}|$. Žiže elipse su u tačkama -1 i 1. Primijetimo da je za $r > 1$ orijentacija elipse saglasna sa orijentacijom kružnice $z = re^{i\varphi}$, a da su za $r < 1$ ove orijentacije suprotne. Za $r = 1$ slika kružnice je odsječak $[-1, 1]$, pri čemu za svaku tačku $w \in [-1, 1]$ postoje tačno dvije različite tačke $z_1, z_2 \in \{z : |z| = 1\}$, takve da je $f(z_1) = f(z_2) = w$.

2. Slično dobijamo da je slika poluprave $\arg z = \alpha$ za $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ desna a za $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ lijeva grana hiperbole

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

   Na slici 4.10 prikazano je kako se funkcijom Žukovskog kružnice i poluprave slikaju u parabole i grane hiperbola. Slika se odnosi na spoljašnjost jediničnog diska, ali slična je i slika koja prikazuje slike duži i lukova iz unutrašnjosti jediničnog diska.

3. Poluprava $\arg z = 0$ (pozitivni dio realne ose) slika se u polupravu $[1, +\infty)$,



Slika 4.10: Slika spoljašnjosti jediničnog diska funkcijom Žukovskog.

4. polupravе $z = \frac{\pi}{2}$ i $\arg z = \frac{3\pi}{2}$ slikaju se na imaginarnu osu $\operatorname{Re} w = 0$,

5. poluprava $\arg z = \pi$ slika se u $(-\infty, -1]$,

6. poluprava $\arg z = \pi$ slika se u $(-\infty, -1]$.

Primjer 3.10. Funkcija $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, koja je inverzna funkcija funkcije Žukovskog je višeznačna. U ravni s rezom $[-1, 1]$, ova funkcija se grana na dvije analitičke grane.

Primjer 3.11. Neka je $D = \{z : |z - ih| > (1 + h^2)^{\frac{1}{2}}, h \in \mathbb{R}^+$. Dokažimo da je funkcija Žukovskog univalentna na D i nađimo sliku $f(D)$ oblasti D.

Ako je

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

onda je

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

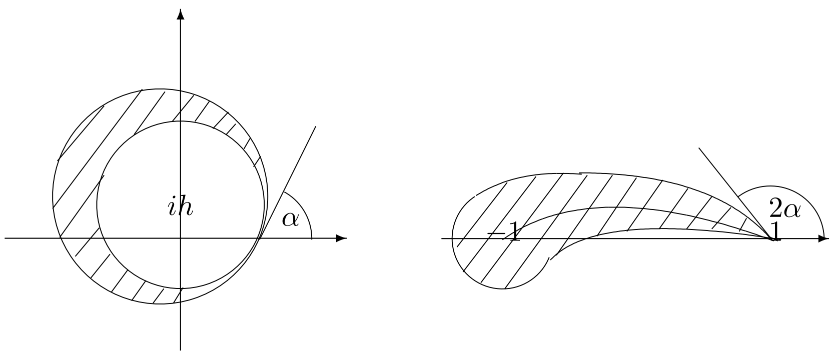
pa se funkcija Žukovskog f može napisati kao kompozicija $f = \theta \circ \varphi \circ \psi$, gdje je

$$\xi = \psi(z) = \frac{z-1}{z+1}, \eta = \varphi(\xi) = \xi^2, w = \theta(\eta) = \frac{\eta+1}{1-\eta}.$$

Primijetimo da je granica oblasti D kružnica γ s centrom u tački ih.

Kružnici γ, koja je granica oblasti D, pripadaju tačke $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = ia, z_4 = -\frac{i}{a}$, gdje je $a = h + (1+h^2)^{\frac{1}{2}}$. Preslikavanjem ψ kružnica γ se slika u pravu l koja prolazi kroz tačku 0; slika $\varphi(l)$ prave l je poluprava l' sa početkom u 0. Na kraju, slika $\theta(l')$ je kružni luk sa krajevima $w_1 = -1$ i $w_2 = 1$. Pri tome je $f(ia) = ih$, odakle slijedi da je slika $f(D)$ oblasti D ravan sa rezom po kružnom luku čiji su krajevi tačke $w_1 = -1, w_2 = 1$, koji sadrži tačku $w_3 = ih$.

Istaknimo da je slika kružnice k koja dodiruje (spolja) kružnicu γ u tački $z = -1$, (vidjeti sliku 4.11) kriva koja podsjeća na krilo aviona. Zapravo Žukovski je koristio gornju funkciju za proračune potisne sile krila aviona. Kriva $f(k)$ naziva se *profilom Žukovskog.*



Slika 4.11: Profil Žukovskog.

Zadaci

1. Neka je D kompleksna ravan sa rezom a) $[0, +\infty)$, b) $(-\infty, 0]$.

U oblasti D funkcija $\sqrt{z}$ razlaže se na dvije grane $z \mapsto f_1(z)$ i $z \mapsto f_2(z) = -f_1(z)$. Grana f_1 može se definisati tako što se postavi da funkcija f_1 na gornjoj ivici reza uzima pozitivnu vrijednost, tj. $f_1(x + 0i) = \sqrt{x}, x > 0$. Odrediti slike $f_1(D)$ i $f_2(D)$ oblasti D.

2. Neka je D spoljašnjost parabole $y^2 = px + p^2$ i f_1 analitička grana funkcije $\sqrt{z}$ za koju je $f_1(\frac{-p}{2}) = i\sqrt{\frac{p}{2}}$. Naći slike $f_1(D)$ i $f_2(D)$, ako je $f_2(z) = -f_1(z)$.

3. Neka je D kompleksna ravan sa rezom $[0,1] \cup \{z : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/2\} \cup i \cdot [1, \infty)$ i $f(z) = \sqrt{z}_D$ preslikavanje definisano 1.12. Odrediti $f(D)$.

4. Neka je D gornja poluravan sa rezom $(0, ih]$, gdje je $h > 0$. Naći konformno i bijektivno preslikavanje koje oblast D slika na gornju poluravan.

5. Dokazati da su oblasti $D = \{z : 0 < \arg z < \beta\}$ i gornja poluravan konformno ekvivalentne i naći odgovarajuće konformno i bijektivno preslikavanje.

6. Oblast $D = \{z : |z| < 1, |z - i| < 1\}$ preslikati konformno na gornju poluravan.

7. Odrediti $f(D)$ ako je

   a) D dio kruga koji prolazi kroz tačke 0 i 1 i siječe realnu osu pod uglom $\frac{\pi}{4}$ i $f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{4}{3}}$;

   b) $D = \mathbb{C} \setminus D'$, gdje je $D' = \{z : |z| \leq 1, \text{Im } z \geq 0\}$ i $f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{2}{3}}$;

   c) $D = \{z : \text{Im } z > 0\} \cup \{z : |z| < 1\}$ i $f(z) = (\frac{z-1}{1+z})^{\frac{2}{3}}$;

   d) D ravan sa rezom $[0,1]$ i $f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}$;

   e) D ravan sa rezom $\{z : \text{Im } z \geq 0, |z| = 1\}$ i $f(z) = \left(\frac{i(z+1)}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}$;

f) D ravan sa rezom $(-\infty, 1] \cup [2+\infty)$ i $f(z) = \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

8. Ako je preslikavanje definisano sa $f(z) = e^z$, odrediti sliku

   a) odsječka $\mathrm{Re}\ z = c, a \leq \mathrm{Im}\ z \leq b$, gdje je $b - a < 2\pi$;

   b) pravih $\mathrm{Im}\ z = c$;

   c) pravougaonika $a < \mathrm{Re}\ z < b, c < \mathrm{Im}\ z < d$, gdje je $-\infty \leq a < b \leq +\infty, 0 < b - a \leq 2\pi$.

9. Naći sliku $f(D)$ sektora $D = \{z : 0 < \arg z < \alpha\}(\alpha \leq 2\pi)$, ako je $f(z) = \log z$.

10. Dokazati da je funkcija Žukovskog univalentna u oblasti D ako i samo ako u D ne postoje tačke z_1 i z_2 takve da je $z_1 z_2 = 1$.

11. Da li je funkcija Žukovskog univalentna u sljedećim oblastima

    a) $|z| > 1$;

    b) $|z| < 1$;

    c) $\mathrm{Im}\ z > 0$;

    d) $\mathrm{Im}\ z < 0$.

12. Neka je D oblast u $\mathbb{C}$ i $D' = \{\frac{1}{z} : z \in D\}$. Dokazati da je funkcija Žukovskog $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ univalentna u oblasti D ako i samo ako je $D \cap D' = \emptyset$. Dokazati da je $f(D) = f(D')$.

13. Neka je $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Naći $f(D)$ ako je

    a) $D = \{z : |z| > 1\}$; b) $D = \{z : |z| < 1\}$;

    c) $D = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0\}$; d) $D = \{z : \mathrm{Im}\ z < 0\}$;

    e) $D = \{z : \mathrm{Im}\ z > 0, |z| > 1\}$; f) $D = \{z : \mathrm{Im}\ z < 0, |z| < 1\}$;

    g) $D = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0, |z| < 1\}$; h) $D = \{z : |z| > r\}, r > 1$;

    i) $D = \{z : |z| < 1\}, r < 1$;

    j) $D = \{z : \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

k) $D = \{z : 0 < \arg z < \alpha\}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

l) $D = \{z : 0 < \arg z < \alpha, |z| > 1\}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

14. Preslikati oblast između dvije grane hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ na jedinični disk konformno i bijektivno. (*Uputstvo*. Koristiti funkciju Žukovskog).

15. Neka je D ravan sa rezom $[-1, 1]$ i f_1 i f_2 dvije grane funkcije $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, takve da je $f_1(\infty) = \infty$, $f_2(\infty) = 0$. Odrediti $f_1(D)$ i $f_2(D)$. Da li su preslikavanja f_1 i f_2 konformna i injektivna na D?

16. Neka je D ravan sa rezom $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ i neka su u D definisane dvije grane f_1 i f_2 funkcije $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, takve da je $f_1(0) = i, f_2(0) = -i$.

    (a) Odrediti $f_1(D)$ i $f_2(D)$.

    (b) Da li su preslikavanja f_1 i f_2 konformna i bijektivna na D?

17. Dokazati da funkcija

    (a) $w = \cosh z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi, \text{Re } z > 0\}$ na gornju poluravan;

    (b) $w = \cos z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $\{z : \text{Im } z > 0, -\pi < \text{Re } z < 0\}$ na gornju poluravan;

    (c) $w = \sin z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $\{z : \text{Im } z > 0, \frac{-\pi}{2} < \text{Re } z < \frac{\pi}{2}\}$ na gornju poluravan;

    (d) $w = \tan z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $A = \{z : \text{Im } z > 0, \frac{-\pi}{4} < \text{Re } z < \frac{\pi}{4}\}$ na jedinični poludisk $\{z : |z| < 1 : \text{Im } z > 0\}$ i pokazati da je $\lim_{z\to\infty, z\in A} \tan z = i$.

    (e) $w = \tan z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $A_k = \{z : \frac{-\pi}{4} + k\pi < \text{Re } z < \frac{\pi}{4} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ na jedinični disk. Dokazati da je pri tome $\lim_{\text{Im } z\to+\infty} \tan z = i$ i $\lim_{\text{Im } z\to-\infty} \tan z = -i$.

(f) $w = \tan z$ konformno i bijektivno preslikava oblast $A_k = \{z : \frac{\pi}{4} + k\pi < \mathrm{Re}\ z < \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$ na spoljašnjost jediničnog diska.

18. Dokazati da je funkcija $w = f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ univalentna na jediničnom disku D i naći sliku $f(D)$.

19. Odrediti bar jedno preslikavanje koje konformno i bijektivno slika oblast D na gornju poluravan ako je D

    (a) ravan $\mathbb{C}$ sa rezom $(-\infty, a] \cup [b, +\infty), a < b$;

    (b) gornja poluravan sa rezom po luku $\{z : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha\}, 0 < \alpha < \pi$;

    (c) traka $\{z : 0 < \mathrm{Im}\ z < \pi\}$ sa rezom po duži $[0, i]$;

    (d) traka $\{z : -\pi < \mathrm{Im}\ z < \pi\}$ sa rezom $[1, +\infty)$;

    (e) oblast $\{z : 0 < \mathrm{Im}\ z < \pi, \mathrm{Re}\ z > 0\}$ sa rezom po duži $[\frac{\pi i}{2}, \alpha + \frac{\pi i}{2}]$;

    (f) oblast $\{z : \mathrm{Re}\ z > 0, |z-1| > 1\}$ sa rezom po duži $[2, 3]$;

    (g) skup $\{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2, \mathrm{Im}\ z < 0\}$;

    (h) ravan $\mathbb{C}$ sa rezom po duži $[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

    (i) krug $\{z : |z| < 1\}$ sa rezom po duži $[-1, a]$, gdje je $-1 < a < 1$;

    (j) oblast $\{z : |z| > 1\}$ sa rezom po dužima $[a, -1], [1, b]$.

    (k) ravan $\mathbb{C}$ sa rezom po dužima $[0, 1], [0, e^{2\pi i/3}], [0, e^{4\pi i/3}]$.

20. Dokazati da ako cijela funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ na realnoj osi uzima realne vrijednosti, onda je za svako $z \in \mathbb{C}$, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

21. Neka je funkcija f analitička na $\{z : \mathrm{Im}\ z > 0\} \setminus \{z_0\}$ i neprekidna na $\{z : \mathrm{Im}\ z \geq 0\} \setminus \{z_0\}$, gdje je z_0 prosti pol funkcije f koji leži u gornjoj poluravni. Dokazati da ako funkcija f na realnoj osi uzima

realne vrijednosti i ako je ograničena kada $z \to \infty, \mathrm{Im}\, z \geq 0$, onda je

$$f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \frac{\bar{A}}{z - \overline{z_0}} + B,$$

gdje B konstanta i $A = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$.

4 Opšti principi konformnih preslikavanja

U prethodnom paragrafu izučavili smo klasu bilinearnih konformnih preslikavanja i nekoliko drugih preslikavanja zadatih elementarnim funkcijama. Primijetimo da smo pri tome rješavali dva tipa zadataka. U jednima smo tražili preslikavanje koje konformno preslikava jedan skup na drugi, pri čemu je prethodno bilo potrebno utvrditi da li takvo preslikavanje postoji. U drugim zadacima tražili smo sliku nekog skupa pri zadatom konformnom preslikavanju, i u njima se naravno ne postavlja problem egzistencije rješenja zadatka. Da istaknemo da smo u izlaganju ostavljali po strani mnoga prirodna dopunska pitanja. Recimo, kada smo ustanovili da neko preslikavanje slika oblast D na gornju poluravan, nismo analizirali kako se preslikavaju (ili kako se deformišu) pojedina područja oblasti D.

U ovom dijelu izučavamo opšte principe teorije konformnih preslikavanja a prvo pitanje koje rješavamo je pitanje egzistencije konformnog preslikavanja jedne oblasti na drugu. Teorema koja slijedi daje (istina parcijalan ali svejedno veoma značajan) odgovor na to pitanje.

Teorema 4.1 (Riemannova teorema)**.** *Svaka jednostruko povezana oblast $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ čija se granica sastoji od više od jedne tačke, konformno je ekvivalentna sa krugom $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. U skupu svih funkcija koje konformno i bijektivno preslikavaju jednostruko povezanu oblast D čija se granica sastoji od više od jedne tačke na jedinični disk K, postoji tačno jedna funkcija f, takva da za zadate $z_0 \in D, w_0 \in K, \alpha \in \mathbb{R}$ važi: $f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha$.*

Dokaz ove teoreme je složen i u njemu se koristi skoro čitav aparat kompleksne analize. Počinjemo sljedećom definicijom.

Definicija 4.2. *Za skup funkcija $\mathcal{F}$ definisanih na skupu Ω sa vrijednostima u $\mathbb{C}$ kažemo da je*

a) *tačka po tačka ograničena familija ako za svako $z \in \Omega$ postoji pozitivan realan broj $M(z)$, takav da je $|f(z)| < M(z)$ za svako $f \in \mathcal{F}$;* [7]

b) *ravnomjerno neprekidna familija ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon)$, takvo da za svako $z, w \in \Omega$ koji zadovoljavaju uslov $|z-w| < \delta$, i za svako $f \in \mathcal{F}$, važi: $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*

Uočimo da je svaka funkcija koja pripada ravnomjerno neprekidnoj familiji sama ravnomjerno neprekidna na posmatranom skupu.

Definicija 4.3. *Za skup $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ analitičkih funkcija definisanih na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je normalna familija funkcija ako proizvoljan niz funkcija iz $\mathcal{F}$ sadrži podniz koji konvergira po kompaktima*[8] *skupa Ω ka nekoj analitičkoj funkciji f.*[9]

Teorema 4.4. *Ako niz analitičkih funkcija (f_n) definisanih na oblasti Ω konvergira po kompaktima oblasti Ω ka funkciji f, onda je f analitička funkcija.*

Dokaz. Neka je $z \in \Omega$ i $K = \bar{D}(z, r)$ zatvoreni krug koji leži u Ω. Skup K je kompaktan skup. Na osnovu Cauchyeve teoreme, za svako w koje zadovoljava uslov $|w - z| < r$ važi:

$$f_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - w}.$$

Pošto je K kompaktan sku, odavde slijedi da je

$$f(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - w} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - w}.$$

Tada je

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(\zeta)\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right)\mathrm{d}\zeta$$

[7] *Funkcija $M(z)$ ne mora biti ograničena. Ako je ona ograničena onda kažemo da je $\mathcal{F}$ uniformno ograničena familija.*

[8] *Ako za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$, $\max_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ kada $n \to \infty$, onda kažemo da niz f_n konvergira po kompaktima ka funkciji f.*

[9] *Funkcija f ne mora pripadati familiji $\mathcal{F}$, ali ako dodamo i taj uslov, onda se takva familija naziva kompaktnom familijom.*

i
$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)},$$

pa familija podintegralnih funkcija konvergira (uniformno) ka funkciji $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ kada $h \to 0$. Zbog toga je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}z}{(z-\zeta)^2},$$

odakle slijedi da je f analitička funkcija. [10] $\square$

Teorema 4.5 (Teorema Arzela-Ascoli)**.** *Ako je $\mathcal{F}$ tačka po tačka ograničena ravnomjerno neprekidna familija skupova definisanih na oblasti Ω, onda je $\mathcal{F}$ normalna familija.* [11]

Dokaz. Neka je $\mathbb{Q}^2 := \{z = p + iq : p, q \in \mathbb{Q}\}$ i definišimo E sa $E = \Omega \cap \mathbb{Q}^2 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. Neka je dalje (f_n) proizvoljan niz funkcija iz $\mathcal{F}$. Skup $\{f_n(r_1), n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen u $\mathbb{C}$ i na osnovu teoreme 3.10 postoji podniz $(n_k^1, k \in \mathbb{N})$ niza $(n, n \in \mathbb{N})$ takav da je niz $\{f_{n_k^1}(r_1), n \in \mathbb{N}\}$ konvergentan. Takođe postoji podniz $(n_k^2, k \in \mathbb{N})$ niza $(n_k^1, k \in \mathbb{N})$, takav da je niz $\{f_{n_k^2}(r_2), n \in \mathbb{N}\}$ konvergentan. Produžavajući ovaj postupak, za svaki prirodan broj l konstruišimo niz $(n_k^l, k \in \mathbb{N})$, koji je podniz niza $(n_k^{l-1}, k \in \mathbb{N})$, takav da je niz $(f_{n_k^l}(r_l), n \in \mathbb{N})$ konvergentan. Postupak produžavamo neograničeno. Prema konstrukciji, slijedi da je niz $(f_{n_k^l}(r_j), n \in \mathbb{N})$ konvergentan za svako $1 \le j \le l$.

Posmatrajmo niz funkcija (g_k), gdje je $g_k = f_{n_k^k}$. [12] Tada je (g_k) podniz niza (f_n) sa svojstvom da za svako $r \in E$ niz $(g_k(r))$ konvergira. Dokažimo da niz (g_k) konvergira na kompaktima oblasti Ω. Ako je $K \subset \Omega$ proizvoljan kompaktan skup i $\varepsilon > 0$, onda je i $\varepsilon_1 = \varepsilon/3 > 0$, pa postoji $\delta > 0$, takvo da iz $|z - w| < \delta$ i $k \in \mathbb{N}$ slijedi $|g_k(z) - g_k(w)| < \varepsilon_1$. Primijetimo da je $K \subset \bigcup_{z\in K} B(z, \delta/2)$, pri čemu pa, zbog kompaktnosti skupa K, postoji konačno mnogo krugova $D(z_1, \delta/2), D(z_1, \delta/2), \ldots D(z_M, \delta/2)$, $D(z_i, \delta/2) \subset \Omega$ za $i = 1, \ldots, M$, koji takođe pokrivaju skup K. Zbog gustine skupa $\mathbb{Q}^2$ u

---

[10] *Isti zaključak mogli smo izvesti iz Morerine teoreme na osnovu koje je f analitička funkcija u oblasti Ω ako i samo ako je $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ za svaku zatvorenu konturu u Ω. Tako se dobija $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma g_n(z)\mathrm{d}z = 0$.*

[11] *Teorema je specijalan slučaj teoreme Arzela-Ascoli koja važi za širu klasu funkcija.*

[12] *Ovaj postupak se naziva procesom (postupkom) dijagonalizacije.*

$\mathbb{C}$, [13] za svaki prirodan broj l postoji tačka $r_l \in \mathbb{Q}^2 \cap B(z_l, \delta/2)$. Pošto je $g_k(r_l)$ konvergentan niz, postoji $N_l > 0$, takvo da za $n, m > N_l$ važi: $|g_n(r_l) - g_m(r_l)| < \varepsilon_1$. Otuda, za $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_M\}$ i $n, m > N$ važi $|g_n(r_l) - g_m(r_l)| < \varepsilon_1$, za svako $l \in \{1, \dots, M\}$. Neka je na kraju $z \in K$ proizvoljna tačka skupa K. Tada postoji $l \in \{1, \dots, M\}$, takvo da je $z \in B(z_l, \delta/2)$, pa dakle i $|z - r_l| \le |z - z_l| + |r_l - z_l| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$. Za $n, m > M$ važi

$$|g_n(z) - g_m(z)| \le |g_n(z) - g_n(r_l)| + |g_n(r_l) - g_m(r_l)| + |g_m(r_l) - g_m(z)| < \varepsilon.$$

To znači da je niz $(g_n(z))$ Cauchyev, odakle slijedi da on konvergira za svako $z \in K$. Na taj način možemo definisati funkciju $f(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$, $z \in \Omega$. Ako u gornjim nejednakostima dopustimo da $m \to \infty$, dobijamo da je $|g_n(z) - f(z)| \le \varepsilon$, za svako $z \in K$. Odavde slijedi $\lim_{n\to\infty} \max\{|g_n(z) - f(z)| : z \in K\} = 0$, što je trebalo dokazati. Iz teoreme 4.4 takođe slijedi da je f analitička funkcija na Ω. $\square$

Teorema 4.6. *Ako je skup funkcija $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ uniformno ograničen na svakom kompaktnom podskupu skupa Ω, onda je $\mathcal{F}$ normalna familija.*[14]

Dokaz. S obzirom na teoremu 4.5, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{F}$ ravnomjerno neprekidna familija funkcija na svakom kompaktu $K \subseteq \Omega$. Ako je $z \in K$, onda postoji krug $D(z, r) \subset \Omega$. Pošto je $K \subset \bigcup_{z\in K} D(z, r/4)$, kompaktan skupu, postoji konačna familija krugova $D(z_1, r_1/4)$, $D(z_2, r_2/4)$,..., $D(z_m, r_m/4)$, takva da je $K \subset \bigcup_{k=1}^m D(z_k, r_k/4)$. Neka je $\alpha = \min\{r_1/4, \dots, r_m/4\}$, $C_K = \sup\limits_{z\in K, f\in F} |f(z)|$ i $z, w \in K$, tačke skupa K takve da je $|z - w| < \alpha$. Tada postoji $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, takvo da $z \in D(z_k, r_k/4)$, pa s obzirom da je $|w - z_k| \le |w - z| + |z - z_k| \le r_k/2$, slijedi da $w \in D(z_k, r_k)$. Na osnovu Cauchyeve formule važi:

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_k| = r_k} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) \mathrm{d}\zeta.$$

[13] *Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$ u sljedećem smislu: svaki interval (a, b) iz $\mathbb{R}$ sadrži racionalan broj. Iz ovoga slijedi da i svaki krug $D(z, r) \subseteq \mathbb{C}$ sadrži tačku $w = p + qi$ gdje su p i q racionalni brojevi.*

[14] *Specijalno ako postoji ogrančen skup $\subseteq \mathbb{C}$, takav da je za svako $f \in \mathcal{F}$, $f\Omega) \subseteq A$, onda $\mathcal{F}$ ispunjava uslove ove teoreme.*

Pošto je

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right| = \left|\frac{z-w}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\right|$$
$$\leq \frac{|z-w|}{(|\zeta - z_k| - |z - z_k|)(|\zeta - z_k| - |w - z_k|)} \leq \frac{4|z-w|}{\alpha^2},$$

slijedi da je

$$|f(z) - f(w)| \leq 4\frac{|z-w|}{\alpha^2} \max_{z:|\zeta - z| = r_k} |f(z)| \int_{|\zeta - z_k| = r} \frac{|\mathrm{d}z|}{2\pi} \leq \frac{4C_K}{\alpha^2}|z-w|.$$

Ako je $\varepsilon > 0$, onda za $\delta = \min\{\alpha, \frac{\alpha^2}{4C_K}\varepsilon\}$ i $|z-w| < \delta$, $z, w \in K$, važi: $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, pri čemu δ ne zavisi od izbora funkcije f. Teorema je dokazana. $\square$

Teorema 4.7. *Ako je a tačka oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, tada je preslikavanje $l : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definisano sa $l(f) = |f'(a)|$, neprekidno. Ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ zatvorena neprazna i normalna familija funkcija, onda postoji funkcija $f_0 \in \mathcal{F}$ takva da je*

$$l(f_0) = \max_{f \in \mathcal{F}} |f'(a)| = |f_0(a)|.$$

Dokaz. Na početku pojasnimo tvrđenje teoreme. Treba dakle dokazati da ako niz funkcija (f_n) iz $\mathcal{H}(\Omega)$ konvergira na kompaktnim podskupovima skupa Ω ka nekoj funkciji f, tada $|f_n'(a)| \to |f'(a)|$ kada $n \to \infty$.

Neka je $K = \overline{D}(a, r) \subset \Omega$ zatvoreni krug. Tada je, prema Cauchyevoj formuli,

$$f_n'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^2}$$

i s obzirom na pretpostavku da $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, važi

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^2}.$$

Odavde slijedi da je

$$\left|f_n'(a) - f'(a)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \frac{2\pi r}{r^2}.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$, slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left|f_n'(a) - f'(a)\right| = 0.$$

To znači da je $\lim_{n\to\infty} |f_n(a)| = |f'(a)|$, odnosno da je l neprekidno preslikavanje.

Neka je $b = \sup_{f\in\mathcal{F}} |f'(a)|$. Tada postoji niz (f_n) funkcija iz $\mathcal{H}$, takav da je $\lim_{n\to\infty} |f_n(a)| = b$. Kako je $\mathcal{F}$ normalna i zatvorena familija, slijedi da postoji podniz (f_{n_k}) niza (f_n) koji konvergira po kompaktima ka nekoj funkciji $f_0 \in \mathcal{F}$. Kako je l neprekidno preslikavanje, slijedi da je

$$b = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}'(a)| = \lim_{k\to\infty} l(f_{n_k}) = l(f_0) = |f_0'(a)|.$$

Teorema je dokazana. $\square$

Teorema 4.8. *Ako je (f_n) niz univalentnih analitičkih funkcija definisanih na oblasti Ω, koji konvergira na kompaktnim podskupovima skupa Ω ka nekoj nekonstantnoj funkciji f, onda je f univalentna analitička funkcija na Ω.*

Dokaz. Iz teoreme 4.4 slijedi da je f analitička funkcija. Neka su z_1 i z_2 dvije različite tačke iz Ω i neka je $\overline{D}(z_2, r) \subset \Omega$ zatvoreni disk koji ne sadrži tačku z_1. Neka je $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$. Niz (g_n) konvergira na kompaktima ka funkciji $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Funkcije g_n su univalentne na Ω. Kako je $g_n(z_1) = 0$, slijedi da je $g_n(z_2) \neq 0$, pa (za svako n) postoji $r > 0$, takvo da je $g_n(z) \neq 0$ za $z \in \overline{D}(z_2, r)$.

Pošto je f (pa dakle i g) nekonstantna analitička funkcija, na osnovu teoreme o nulama analitičke funkcije, slijedi da postoji kružnica $S = \{z : |z - z_2| = r_1\}$, $r_1 < r$ na kojoj funkcija g nema ni jednu nulu. Neka je $\varepsilon = \min\ |g(z)| : |z - z_2| = r_1$. Skup S je kompaktan, pa postoji prirodan broj n_1, takav da za $n \geq n_1$ važi: $|g(z) - g_n(z)| < \varepsilon$ za svako $z \in S$. Pošto je $\varepsilon \leq |g(z)|$ za $z \in S$, slijedi da su ispunjeni uslovi Roucheove teoreme na osnovu koje funkcija g i g_n imaju isti broj nula na skupu $|z - z_2| < r_1$. Međutim, funkcija g_n nema ni jednu nulu, pa je i $g(z) \neq 0$ za $|z - z_2| < r_2$. Specijalno je $g(z_2) \neq 0$, odnosno, $f(z_1) \neq f(z_2)$, što je trebalo dokazati. $\square$

Teorema 4.9. *Ako je $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ i $\Omega \subset U$ prosto povezana oblast koja sadrži tačku $z = 0$, tada je skup*

$$\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset U,\ f \text{ je injektivna},\ f(0) = 0\ \ i\ |f'(0)| \geq 1\},$$

neprazan i kompaktan u $\mathcal{H}(\Omega)$ i postoji funkcija $f \in \mathcal{A}$, takva da je

$$|f'(0)| = \sup_{g \in \mathcal{A}} |g'(0)|.$$

Funkcija f je biholomorfizam skupa Ω i jediničnog diska.

Dokaz. Kako je $\Omega \subset U$, funkcija $z \mapsto z$ pripada skupu $\mathcal{A}$, pa je skup $\mathcal{A}$ neprazan. Pri tome, $\mathcal{A}$ je ograničena familija analitičkih funkcija, pa iz teoreme 4.6 slijedi da je to normalna familija. Dokažimo da je to istovremeno i zatvorena familija.

Neka je $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ i $f_n \in \mathcal{A}$. Tada je $f(0) = 0$ i $|f'(0)| \geq 1$, pa je f nekonstantna analitička funkcija. Dokažimo da je $f(\Omega) \subset U$. Ako je $z \in \Omega$ i $w = f(z)$, tada, zbog $f_n(\Omega) \subseteq U$, slijedi da je $w = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \in \bar{U}$. Dakle $f(\Omega) \subset \bar{U}$. Ako bi $w \in \partial U$, onda bi, na osnovu principa maksimuma, slijedilo da je f konstantna funkcija, što je suprotno pretpostavci teoreme. Dakle $f(\Omega) \subset U$, pa je $f \in \mathcal{A}$. Slijedi da je $\mathcal{A}$ normalna zatvorena familija. Odavde, na osnovu teoreme 4.7, slijedi prvi dio tvrđenja teoreme.

Na osnovu teoreme 4.8, f je univalentna a na osnovu teoreme 1.14 f je biholomorfizam skupa Ω i skupa $f(\Omega)$. Dokažimo da je $f(\Omega) = U$. Pretpostavimo suprotno da postoji $a \in U \setminus f(\Omega)$. Dokazaćemo da će tada postojati funkcija $g \in \mathcal{A}$, takva da je $|g'(0)| > |f'(0)|$, što će biti kontradikcija sa pretpostavkama teoreme.

Posmatrajmo funkciju

$$F(z) = \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)},$$

koja je analitička na prostopovezanoj oblasti Ω, pri čemu je $F(z) \neq 0$ i $F(z) \neq \infty$ za svako $z \in \Omega$ (zbog $f(z) \neq a$ i $f(z) \neq 1/\bar{a}$). Na osnovu teoreme 1.12, slijedi da postoji funkcija $G(z) = \log F(z)$ koja je analitička na Ω. Kako je $|F(z)| < 1$ i $\mathrm{Re}\, G(z) = \log(|F(z)|$, slijedi da je $\mathrm{Re}\, G(z) < 0$ za svako $z \in \Omega$. Funkcija G je injektivna, kao kompozicija injektivnih funkcija $z \to \log z$, $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ i funkcije f.

Funkcija

$$\phi(z) = \frac{z - b}{z + \bar{b}},$$

gdje je $\mathrm{Re}\, b < 0$, preslikava poluravan $\mathrm{Re}\, z < 0$ na krug U. Konačno, stavljajući $b = G(0)$, dobijamo funkciju

$$g(z) := \phi(G(z)) = \frac{G(z) - G(0)}{G(z) + \overline{G(0)}},$$

koja pripada familiji $\mathcal{A}$.

Ocijenimo $|g'(0)|$. Imamo da je

$$G'(0) = \left(\bar{a} - \frac{1}{a}\right) f'(0) \;\text{ i }\; g'(0) = \frac{G'(0)}{G(0) + \overline{G(0)}} = \frac{1 - |a|^2}{-2a \log |a|} \cdot f'(a).$$

Otuda je

$$\frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - |a|^2}{-2|a| \log |a|}.$$

Posmatrajmo funkciju $\tau(t) = 1 - t^2 + 2t \log t$ za $0 < t \leq 1$. Tada je $\tau'(t) = 2(1 - t + \log t)$ i $\tau''(t) = 2\frac{1-t}{t} > 0$ za $t \in (0, 1]$, odakle slijedi da je τ' rastuća funkcija. To znači da za $t < 1$ važi: $\tau'(t) < \tau'(1) = 0$, pa je τ opadajuća funkcija, pa je, za $0 < t < 1$, $\tau(t) > \tau(1) = 0$. Odavde slijedi da je

$$\frac{1 - |a|^2}{-2|a| \log |a|} > 1$$

i dalje $|g'(0)| > |f'(0)|$. Ovo je kontradikcija jer je f funkcija na kojoj preslikavanje $f \mapsto |f'(0)|$ dostiže maksimum . Zaključujemo da je f biholomorfizam oblasti Ω i kruga U. $\square$

Dokazu Riemannove teoreme pribiližava nas sljedeće tvrđenje.

Teorema 4.10. *Ako je $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ jednostruko povezana oblast*[15] *čija granica sadrži više od jedne tačke, onda postoji konformno preslikavanje oblasti D na oblast Ω koja leži u krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, takvo da datu tačku $a \in D$ preslikava u $0 \in \Omega$.*

Dokaz. Ako je $b \in \partial D, b \neq \infty$. Tada funkcija $g(z) = z - b$ nema nula na skupu D. Kako je D prosto povezana oblast, slijedi da postoje analitičke funkcije h_1 i h_2 definisane na D, takve da je $h_1^2(z) = h_2^2(z) = g(z)$, $h_1 = -h_2$. Prema teoremi o otvorenom preslikavanju, skupovi $U_+ = h_1(D)$ i $U_- = h_2(D)$ su otvoreni. Oni su i disjunktni. U suprotnom postojale bi tačke $z_1, z_2 \in D$ takve da je $h_1(z_1) = h_2(z_2) (= w)$, a tada bismo (zbog $h_1 = -h_2$) imali da je $w = 0$ i dakle $z_1 = b$, što nije moguće jer je $b \in \partial D$. To znači da je oblast D biholomorfna sa U_+. Kako je U_- otvoren skup, postoji zatvoren krug $D(a, r) \subset U_-$. Tada je $D(a, r) \cap U_+ = \emptyset$. Otuda slijedi da funkcija $p(z) = \frac{r}{z-a}$ preslikava skup U_+ u jedinični disk, i dalje

[15] *Tada je D prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$ ili, ako $\infty \in \partial D$, tada je granica ∂D povezan skup u $\overline{\mathbb{C}}$.*

da funkcija $q(z) = p(h_1(z))$ preslikava oblast D u jedinični disk. Konačno, funkcija

$$f(z) = \frac{q(z) - q(a)}{1 - \overline{g(a)}q(z)}$$

preslikava oblast D na neku oblast $\Omega \subset U$ i pri tome je $f(a) = 0 \in \Omega$. Teorema je dokazana. $\square$

Sada Riemannovu teoremu možemo izvesti kao posljedicu dokazanih tvrđenja. Zaista, ako je D jednostruko povezana oblast i $z_0 \in D$, tada, prema teoremi 4.4.10. postoji preslikavanje g koje slika D na oblast $\Omega \subseteq D(0,1)$ i takvo da je $g(z_0) = 0 \in \Omega$. Dalje, prema teoremi 4.4.9., postoji preslikavanje h koje je biholomorfizam oblasti Ω i $D(0,1)$, pri čemu je $h(0) = 0$, $|h'(0)| \geq 1$. Preslikavanje $f(z) = e^{i\varphi}h(g(z))$, pri povoljnom izboru ugla rotacije φ zadovoljava uslove teoreme. Riemannova teorema je dokazana.

Posljedica 4.11 (Riemannove teoreme za proizvoljne oblasti)**.** *Ako su D i D' jednostruko povezane oblasti u odnosu na $\overline{\mathbb{C}}$ čije se granice sastoje od više od jedne tačke, tada za zadate $z_0 \in D$, $w_0 \in D'$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji tačno jedna funkcija $f : D \to D'$ koja konformno i bijektivno preslikava oblast D na oblast D', takva da je $f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \alpha$.*

Dokaz. Neka $\alpha \in \mathbb{R}$, $z_0 \in D$ i $w_0 \in D'$. Na osnovu leme 4.10 postoje funkcije h_1 i g_1 koje konformno preslikavaju oblasti D i D' redom u oblasti $\Omega, \Omega' \subset D(0,1)$ i koje zadovoljavaju uslove $h_1(z_0) = 0$ i $g_1(w_0) = 0$. Na osnovu teoreme 4.9 postoje konformna preslikavanja h_2 i g_2 koja preslikavaju redom oblasti Ω i Ω' na jedinični disk i zadovoljavaju uslove $h_2(0) = g_2(0) = 0$. Neka je $h = h_2 \circ h_1$, $g = g_2 \circ g_1$ i $f(z) = g^{-1}(e^{i\varphi}h(z))$. Tada je

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = \varphi - \arg(g'(w_0)) + \arg(h'(z_0)).$$

Za

$$\varphi = \arg(g'(w_0)) - \arg(h'(z_0)) + \alpha = \arg(\frac{g'(w_0)}{h'(z_0)}) + \alpha$$

funkcija f zadovoljava uslove teoreme.

Dokažimo jedinstvenost preslikavanja f. Pretpostavimo da i preslikavanje $f_1 : D \to D'$ konformno i bijektivno preslikava D na D' i zadovoljava uslove $f_1(z_0) = w_0, \arg f_1'(z_0) = \alpha$. Neka je $q(z) = e^{-i\varphi}g(f_1(h^{-1}(z)))$, gdje su g i h funkcije konstruisane u prethodnom dijelu dokaza. Tada je q konformno preslikavanje koje preslikava jedinični disk $D(0,1)$ na sebe i zadovoljava uslove $q(0) = 0$ i $\arg q'(0) = 0$. Dakle $q(z) = z$, odakle slijedi da je $f_1(z) = g^{-1}(e^{i\varphi}h(z)) = f(z)$, što je trebalo dokazati. $\square$

Primjedba 4.12. U iskazu Riemannove teoreme stoji uslov da je D jednostruko povezana oblast čija se granica sastoji od više od jedne tačke. Time se zapravo isključuju sljedeće jednostruko povezane oblasti: zatvorena kompleksna ravan $\overline{\mathbb{C}}$ i zatvorena kompleksna ravan $\overline{\mathbb{C}}$ bez jedne tačke.

Primjedba 4.13. Ako su D i D' jednostruko povezane oblasti čije se granice sastoje od više od jedne tačke, onda postoji beskonačno mnogo konformnih i bijektivnih preslikavanja f oblasti D na oblast D'. Dopunski uslovi tipa $f(z_0) = w_0$ i $\arg f'(z_0) = \alpha$ garantuju jedinstvenost preslikavanja f. Oni se mogu zamijeniti drugim uslovima, naprimjer uslovima $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1$, gdje su z_0 i w_0 unutrašnje a z_1 i w_1 granične tačke oblasti D i D', ili uslovima $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ gdje su z_0, z_1, z_2 i w_0, w_1, w_2 tačke sa granica oblasti D i D', numerisane prema pozitivnoj orijentaciji krivih koje ograničavaju oblasti D i D'.

Primjer 4.14. Odredimo funkciju $w = f(z)$ koja konformno preslikava otvorenu oblast $\operatorname{Im} z < 1, |z| > 1$ na krug $|w| < 1$ i zadovoljava uslove

1. $f(-3i) = 0,\ \arg f'(-3i) = \frac{\pi}{3}$.
2. $f(-3i) = \frac{-1+i}{2},\ \arg f'(-3i) = \frac{\pi}{2}$.

Funkcija $f_1 : z \to 1/(z-i)$ preslikava polazni skup na traku $0 < y < \frac{1}{2}$ i pri tome je

$$f_1(-3i) = \frac{1}{-4i} = \frac{1}{4}i \text{ i } \arg f_1'(-3i) = \arg\left(-\frac{1}{(z-i)^2}\right) = \arg\left(\frac{1}{16}\right) = 0.$$

Dalje, funkcija $f_2(z) = e^{2\pi z}$ traku $0 < y < \dfrac{1}{2}$ preslikava na gornju poluravan i pri tome je $f_2(\frac{i}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ i $\arg f_2'\left(\dfrac{i}{4}\right) = \arg(2\pi e^{\frac{\pi}{2}i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Konačno, funkcija

$$f_3(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\overline{a}}, \operatorname{Im} a > 0,$$

preslikava gornju poluravan na jedinični disk, pri čemu je

$$f_3(i) = e^{i\varphi}\frac{i-a}{i-\overline{a}} \text{ i } \arg(f_3'(i)) = \arg\left(e^{i\varphi}\frac{(a-\overline{a})}{(i-\overline{a})^2}\right) = \varphi + \frac{\pi}{2} - \arg(i-\bar{a})^2.$$

Funkcija $w = f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ preslikava dati skup na jedinični disk. Razmotrimo posebno postavljene uslove.

1. Iz uslova $f(-3i) = 0$ slijedi $f_3(i) = 0$, odnosno $a = i$ i $\arg f_3'(i) = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Uzimajući u obzir uslov $\arg f'(-3i) = \frac{\pi}{3}$ i jednakost $f'(-3i) = f_3'(i) \cdot f_2'(\frac{1}{4}i) \cdot f_1'(-3i)$, dobijamo $\arg f'(-3i) = \varphi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$. To znači da je $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Odavde slijedi da je

$$w = f(z) = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\operatorname{th}\frac{\pi i(z+3i)}{4(z-i)}.$$

2. Slično, iz uslova $f(-3i) = \frac{i-1}{2}$ dobijamo

$$f_3(i) = \frac{i-1}{2} = e^{i\varphi}\frac{i-a}{i-\overline{a}} \text{ i } \varphi + \frac{\pi}{2} - 2\arg(i-\overline{a}) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Odavde slijedi da je

$$e^{i\varphi} = -i\frac{(i-\bar{a})^2}{(i-\bar{a})(-i-a)} = i\frac{i-\bar{a}}{i+a},$$

odnosno

$$a = \frac{2+i}{5} \text{ i } e^{i\varphi} = i\frac{3i-1}{3i+1} = -\frac{2-i}{2+i}.$$

Na kraju, kompozicijom gornjih funkcija dobija se preslikavanje

$$w = f(z) = -\frac{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}} + 2 - i}{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}} + 2 + i}.$$

Jedno opšte i veoma važno svojstvo konformnih preslikavanja, sretali smo u, možda prikrivenom obliku, u primjerima koje smo rješavali.

Teorema 4.15 (Princip korespondencije granica)**.** *Neka su D i D' oblasti ograničene zatvorenim krivima γ i Γ. Ako je funkcija $f : D \to D'$ analitička u D i neprekidna u $D \cup \gamma$ i ako f preslikava obostrano jednoznačno krivu γ na krivu Γ, čuvajući pri tome i orijentaciju, onda funkcija f bijektivno i konformno preslikava D na D'.*

Dokaz. Neka je $w_0 \in D'$ i $g(z) = f(z) - w_0$. Tada je $g(z) \neq 0$ za svako $z \in \gamma$. Na osnovu principa argumenta slijedi da je broj N nula funkcije g u oblasti D jednak

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg[g(z)] = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg[f(z) - w_0] = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg[w - w_0] = 1.$$

Dakle, za svako $w_0 \in D'$ postoji tačno jedno $z_0 \in D$ takvo da je $f(z_0) = w_0$.

Pretpostavimo sada da je w_1 spoljašnja tačka oblasti D. Tada je $\Delta_\Gamma \arg[w - w_1] = 0$, odakle slijedi da je $f(z) \neq w_1$ za svako $z \in D$. To znači da je $f : D \to D'$ bijekcija. Kako je funkcija f analitička u D, to je, na osnovu leme 1.13, $f'(z) \neq 0$ za svako $z \in D$. Teorema je dokazana. □

Sljedeća teorema, koja je u nekom smislu inverzna prethodnoj, takođje govori o opštim svojstvima konformnih preslikavanja. Njen dokaz čitaoc može naći, na primjer, u [1].

Teorema 4.16 (Teorema o korespondenciji granica)**.** *Ako su D i D' oblasti ograničene Jordanovim krivima γ i Γ i $f : D \to D'$ bijektivno i konformno preslikavanje, tada postoji funkcija $g : D \cup \gamma \to D' \cup \Gamma$, takva da je*

a) $g(z) = f(z), z \in D$;

b) *g neprekidna na $D \cup \gamma$;*

c) *$g|_\gamma : \gamma \to \Gamma$ bijekcija koja čuva orijentaciju.*

Krugu pitanja vezanih za konformna preslikavanja pripadaju i pitanja o mogućnosti analitičkog produženja date funkcije.

Teorema 4.17 (Princip neprekidnosti)**.** *Neka su D_1 i D_2 disjunktne oblasti takve da postoji glatka otvorena (bez krajeva) kriva $\gamma \subseteq \partial D_1 \cap \partial D_2$. Ako su funkcije $f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ i $f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ analitičke u oblastima D_1 i D_2, neprekidne na $D_1 \cup \gamma$, odnosno $D_2 \cup \gamma$ i ako je $f_1(z) = f_2(z), z \in \gamma$, onda je funkcija*

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & z \in D_2 \cup \gamma \end{cases}$$

analitička u $D = D_1 \cup D_2 \cup \gamma$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je F diferencijabilna na γ. Ako je $z_0 \in \gamma$ i $\partial D(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| = \delta\}$ krug koji siječe γ u dvijema tačkama, onda je funkcija

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = \delta} \frac{F(\eta)}{\eta - z} d\eta, \quad z \in D(z_0, \delta)$$

analitička u $D(z_0, \delta)$. Neka je $D_{10} = D_1 \cap D(z_0, \delta), D_{20} = D_2 \cap D(z_0, \delta)$. Tada, za $z \in D_{k0}, k = 1, 2$, važi:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{k0}} \frac{f_k(\eta)}{\eta - z} d\eta = \begin{cases} f_k(z), & z \in D_{k0} \\ 0, & z \in D(z_0, \delta) \setminus \overline{D_{k0}}. \end{cases}$$

Sabirajući gornje dvije jednakosti dobijamo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \delta)} \frac{F(\eta)}{\eta - z} d\eta = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_{10} \\ f_2(z), & z \in D_{20}. \end{cases}$$

Odavde slijedi da je $\Phi(z) = F(z), z \in D_{10} \cup D_{20}$. Jednakost $\Phi(z_0) = F(z_0)$ slijedi iz neprekidnosti funkcija Φ i F u tački z_0. To znači da je funkcija F diferencijabilna u tački z_0, odnosno na γ. $\square$

Sljedeći princip je posebno pogodan za konstrukciju konformnih preslikavanja simetričnih oblasti. Prije formulacije samog principa, podsjetimo se definicije simetričnosti u odnosu na krug i u odnosu na pravu. Simetrična tačka tačke z u odnosu na kružnicu $k = S(a, r)$ je tačka $z^* := a + \dfrac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$; ako je $p = \{z : z = a + tb, t \in \mathbb{R}\}$ proizvoljna prava u kompleksnoj ravni (krug u $\overline{\mathbb{C}}$) i tačka $z \in \overline{\mathbb{C}}$, tada je tačka $z^* := a + \dfrac{b}{\bar{b}}(\bar{z} - \bar{a})$ simetrična tačka tačke z u odnosu na pravu p. Ako je p realna osa, onda je tački z simetrična u odnosu na p tačka $z^* = \bar{z}$.

Teorema 4.18 (Princip simetrije Riemanna i Schwartza). *Neka granica oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ sadrži otvoreni kružni luk γ u $\overline{\mathbb{C}}$ i neka je D^* oblast simetrična oblasti D u odnosu na γ. Ako je funkcija f analitička u D i neprekidna u $D \cup \gamma$, $f(\gamma) \subseteq \Gamma$, gdje je Γ kružnica u zatvorenoj kompleksnoj ravni $\overline{\mathbb{C}}$, i $f^*(z)$ tačka tačka simetrična tački $f(z)$ u odnosu na kružnicu Γ, onda je funkcija*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in D \cup \gamma \\ f^*(z), z \in D^*, \end{cases}$$

analitička u $D \cup \gamma \cup D^*$.

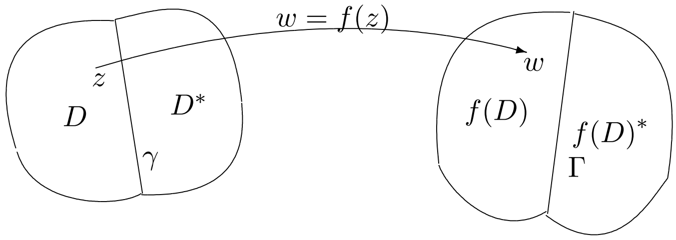
Dokaz. Pretpostavimo prvo da su γ i Γ intervali koji leže na realnim osama (to su kružni lukovi u $\mathbb{C}$). Ako je $z_0 \in D$, tada postoji $\delta > 0$, takvo da je $D(z_0, \delta) \subseteq D$, i pri tome je

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots , z \in D(z_0, \delta) \subseteq D.$$

Neka je za $z \in D^*$, $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Tada je

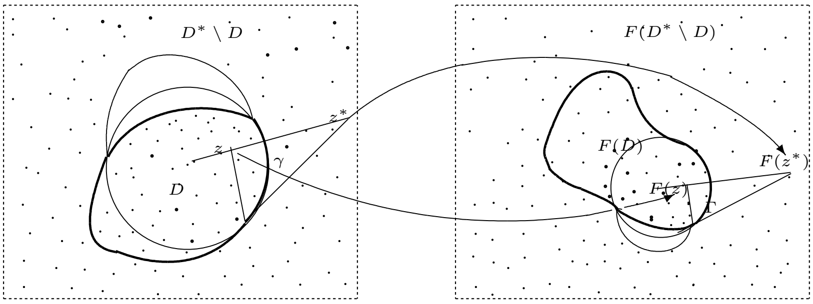
$$f^*(z) = \bar{a_0} + \bar{a_1}(z - \bar{z_0}) + \cdots + \bar{a_n}(z - \bar{z_0})^n + \cdots , z \in D(\bar{z_0}, \delta) \subseteq D^*.$$

Slijedi da je f^* analitička u $D(\bar{z}_0, \delta)$, a pošto je z_0 proizvoljna tačka oblasti D, odnosno, $z_1 = \overline{z_0}$ proizvoljna tačka oblasti D^*, slijedi da je funkcija f^* analitička u D^*. Kako je f neprekidna na $D \cup \gamma$, onda za tačku $x_0 \in \gamma$ (to je tačka sa realne ose), iz $z \to x_0$, slijedi $f(z) \to f(x_0)$ i $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \to \overline{f(x_0)} = f(x_0)$, što znači da je $f^*(z) = f(z)$ za $z \in \gamma$. Na osnovu prethodne teoreme slijedi da je funkcija F analitička na $D \cup D^* \cup \gamma$. Pri tome je $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$, što znači da su tačke $F(z)$ i $F(\bar{z})$ simetrične u odnosu na Γ.



Slika 4.12: Princip simetrije Riemanna-Schwartza u odnosu na prave.

Pretpostavimo sada da je γ kružni luk a Γ kružnica. Tada postoje bilinearna preslikavanja $\xi = \varphi(z), \eta = \psi(w)$ koja krive γ i Γ preslikavaju u duži na realnoj pravoj. Tada funkcija $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ definisana na $\varphi(D)$, ima analitičko produženje na oblast $[\varphi(D)]^*$, koja je simetrična sa $\varphi(D)$ u odnosu na realnu osu, i ta funkcija preslikava oblast $[\varphi(D)]^*$ u oblast $(\psi(f(D)))^*$, koja je simetrična oblasti $\psi(f(D))$ u odnosu na realnu osu. Otuda slijedi da je funkcija $f(z) = \psi^{-1}(g(\varphi(z)))$ analitička na $D \cup \gamma \cup D^*$ i ona ovu oblast preslikava na oblast $f(D) \cup \Gamma \cup f(D)^*$ (vidi slike 4.12 i 4.13). $\square$



Slika 4.13: Princip simetrije Riemanna-Schwartza u odnosu na kružnice.

Primjer 4.19. Dokazaćemo princip simetrije Riemanna-Schwartza za slučaj kada je kriva γ interval koji leži na realnoj osi, koristeći Morerinu teoremu.

Za $z_0 \in \gamma$ postoji krug $\overline{D}(z_0, r)$ koji leži u skupu $D \cup \gamma \cup D^*$. Pri tome je $(z_0 - r, z_0 + r) \subset \gamma$. Na osnovu Teoreme 3.7 dovoljno je dokazati da je integral funkcije F po proizvoljnom trouglu koji pripada skupu $D(z_0, r)$ jednak nuli. Za proizvoljni trougao $\Delta \subset D(z_0, r)$ moguća je jedna od sljedeće četiri situacije:

1. $\Delta \subset D$ ili $\Delta \subset D^*$;
2. $\Delta \cap \gamma = [A, B]$, gdje je $[A, B]$ neka stranica trougla;
3. $\Delta \cap \gamma = \{A_1, B_1\}$, gdje su A_1, B_1 neke tačke trougla;
4. $\Delta \cap \gamma = \{A\}$, gdje je A neko tjeme trougla.

Ako važi 1), onda je na osnovu Cauchyeve teoreme $\int_\Delta F(z)dz = 0$. U slučaju 2), ako treće tjeme trougla $C \in D$ i ako sa Δ_ε označimo trougao sa tjemenima $A_\varepsilon = A + \varepsilon(C - A)$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon(C - B)$ i C, tada je za $0 < \varepsilon < 1$, $\Delta_\varepsilon \subset D(z_0, r)$. Na onovu Cauchyeve teoreme slijedi da je $\int_{\Delta_\varepsilon} F(z)dz = 0$. Puštajući da $\varepsilon \to 0$, koristeći ravnomjernu neprekidnost funkcije f, dobija se jednakost $\int_\Delta F(z)dz = 0$.

U slučaju 3), ako su A, B i C tjemena trougla Δ, tada je, na osnovu 3),

$$\begin{aligned}\int_\Delta F(z)dz &= \int_{\Delta(A,B,A_1)} F(z)dz + \int_{\Delta(A_1,B,B_2)} + \int_{\Delta(A_1,B_1,C)} F(z)dz \\ &= 0 + 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

U slučaju 4), posmatrajući trougao $\Delta_\varepsilon = \Delta(A_\varepsilon, B, C)$, gdje je $A_\varepsilon = A + \varepsilon(B - A)$, slično kao u sluăcju 2), dobija se tvrđenje teoreme.

Riemannova teorema tvrdi da se svaka prosto-povezana oblast u $\mathbb{C}$, različita od $\mathbb{C}$, može konformno preslikati na jedinični disk. Ne postoji slična teorema, koja će, recimo, tvrditi da su dvostruko povezane oblasti konformno ekvivalentne nekoj konkretnoj dvostruko povezanoj oblasti. Prosto, problem konformne ekvivalentnosti višestruko povezanih oblasti je složeniji i mi se njime u ovoj knjizi nećemo detaljinije baviti.

Sljedeći primjer nam dobro ilustruje složenost pitanja konformne ekvivalentnosti višestruko povezanih oblasti.

Primjer 4.20. Dokažimo da su dva prstena $P_1 = \{z : r \leq |z| \leq R\}$ i $P_2 = \{w : r_1 \leq |w| \leq R_1\}$ konformno ekvivalentni ako i samo ako je $\frac{R}{r} = \frac{R_1}{r_1}$.[16]

Neka je ispunjen uslov $\frac{R}{r} = \frac{R_1}{r_1} = k$. Tada preslikavanje $f(z) = kz$ bijektivno i konformno slika P_1 na P_2, što znači da su ova dva prstena konformno ekvivalentna.

Pretpostavimo da su P_1 i P_2 konformno ekvivalentni i da funkcija f slika P_1 na P_2 konformno i bijektivno. Moguće su dvije varijante: a) kružnica $|z| = r$ slika se u kružnicu $|w| = r_1$ i b) kružnica $|z| = r$ slika se u kružnicu $|w| = R_1$.

Razmotrimo prvu mogućnost. Produžimo funkciju f na prsten $r^2/R \leq |z| \leq r$ sa $f(z) := \dfrac{r_1^2}{\overline{f(r^2/\bar{z})}}$ (produženu funkciju smo takođe označili sa f). Na osnovu principa simetrije Riemanna-Schwartza, produžena funkcija f preslikava konformno prsten $r^2/R \leq |z| \leq R$ na prsten $r_1^2/R_1 \leq |w| \leq R_1$. Poslije n ponovljanja ovog postupka, dobićemo konformno preslikavanje f koje prsten $A_1^n = \{z : r(\frac{r}{R})^{2^n-1} \leq |z| \leq R\}$ slika na $A_2^n = \{z : r(\frac{r_1}{R_1})^{2^n-1} \leq |w| \leq R_1\}$. Ponavljajući postupak beskonačno mnogo puta dobićmo preslikavanje f koje je definisano na skupu $D = \cup_{n=1}^{\infty} A_1^n = \{z : 0 < |z| < R\}$ (ovo posljednje zbog $(\frac{r}{R})^{2^n-1} \to 0$ kada $n \to \infty$), koje konformno preslikava skup $\{z : 0 < |z| < R\}$ na skup $0 < |w| < R_1$. Po konstrukciji je $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$. Dakle, tačka $z = 0$ je otklonjivi singularitet funkcije f. Prema tome, f konformno preslikava disk $|z| < R$ na disk $|z| < R_1$ a istovremeno i disk $|z| < r$ na disk $|w| < r_1$, i zadovoljava uslov

[16] *U dokazu pretpostavljamo da se granica slika na granicu. Međutim ovo tvrđenje ostaje da važi i ako se ta pretpostavka izostavi. Dokaz je u tom slučaju nešto složeniji.*

$f(0) = 0$. To znači da funkcije $F(z) = \frac{1}{R_1} f\left(\frac{1}{R}z\right)$ i $G(z) = \frac{1}{r_1} f\left(\frac{1}{r}z\right)$ konformno preslikavaju jedinični disk na sebe i pri tome je $F(0) = G(0) = f(0) = 0$. Kako je $w = e^{i\varphi}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ opšta bilinearna transformacija koja preslikava jedinični disk na sebe, dobijamo da je $F(z) = G(z) = e^{i\varphi}z$. Odavde slijedi da je $R/r = R_1/r_1$, što je trebalo dokazati.

Ako se kružnica $|z| = r$ preslikava u kružnicu $|w| = R_1$ onda prethodni zaključak primjenjujemo na funkciju $F(z) = \dfrac{R_1 r_1}{f(z)}$.

Zadaci

1. Naći konformno preslikavanje jediničnog diska na sebe, takvo da je

   (i) $w(0) = 0$ i $\arg w'(0) = \alpha$;

   (ii) $w(a) = 0$ i $\arg w'(a) = \alpha$;

   (iii) $w(a) = b$ i $\arg w'(a) = \alpha$.

2. Dokazati da ako je f analitička funkcija u tački z_0, takva da je $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) \neq 0$, tada se ugao među krivima koje prolaze kroz z_0 preslikavanjem f uveća dva puta.

3. Neka je γ interval na realnoj pravoj i f analitička funkcija definisana na nekoj oblasti D, čija granica sadrži γ. Neka je dalje $\Gamma = f(\gamma)$ kriva koja leži u jednom od sljedećih skupova:

   a) $\mathrm{Re}\ w = 0$; b) $\mathrm{Im}\ w = 0$, c) $\mathrm{Re}\ w = \mathrm{Im}\ w$

   c) $\arg w = \alpha$.

   Dokazati da se funkcija f može konformno produžiti na oblast D^* (simetričnu sa D u odnosu na duž γ). Naći formulu po kojoj se definiše to produženje.

4. Neka je f analitička funkcija na $\mathrm{Im}\ z > 0$, neprekidna na $\mathrm{Im}\ z \geq 0$, koja na realnoj osi uzima realne vrijednosti. Dokazati da se f može analitički produžiti na $\mathbb{C}$.

5. Neka je funkcija f analitička na traci $D = \{z : \alpha_1 < \mathrm{Im}\,(e^{i\varphi}(z - a)) < \alpha_2\}$ koja ima neprekidno produženje na $\{z : \alpha_1 \leq \mathrm{Im}\,(e^{i\varphi}(z - a)) \leq \alpha_2\}$, takvo da se granične prave oblasti D slikaju u realnu osu. Dokazati da se preslikavanje f može analitički produžiti na $\mathbb{C}$.

   Uputstvo. Koristeći preslikavanje f naći preslikavanje koje realnu osu i pravu $\mathrm{Im}\; z = 1$ slika na realnu osu, pa zatim tu funkciju analitički produžiti na traku $-1 \leq \mathrm{Im}\; z \leq 0$ formulom $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Napraviti slično produženje na traku $1 \leq \mathrm{Im}\; z \leq 2$ formulom $F(z + i) = i + \overline{f(\bar{z})}$. Postupak ponavljati.

6. Neka su Q_i, $i = 1, 2$, pravougaonici sa tjemenima a_i, b_i, c_i, d_i. Ako f analitička funkcija koja preslikava Q_1 na Q_2, ima neprekidno produženje na granicu i takvo da tjemena pravougaonika Q_1 preslikava u tjemena pravougaonika Q_2, dokazati da se tada f može analitički produžiti $\mathbb{C}$. Dokazati takođe da ako je f još i univalentna funkcija, tada je ona linearna transformacija. Zaključiti da se dva pravougaonika mogu preslikavati konformno jedan na drugi tako da tjemena jednog prelaze u tjemena drugog ako i samo ako su oni slični.

   Uputstvo: Prvo pravougaonike Q_1 i Q_2 translacijama i rotacijama (dakle linearnim preslikavanjima) preslikati na pravougaonike R_1 i R_2, koji leže u prvom kvadrantu, sa po dvije stranice na realnoj i imaginarnoj osi, a po jednim tjemenom u koordinatnom početku: $R_i = [0, x_i] \times [0, y_i]$, $i = 1, 2$. Tada se f može produžiti na pravougaonik $R_1^1 = [-x_1, x_1] \times [-y_1, y_1]$ i taj pravougaonik preslikati na pravougaonik $R_1^2 = [-x_2, x_2] \times [-y_2, y_2]$. Analogno se preslikavanje produžava na pravougaonike $R_1^m = [-mx_1, mx_1] \times [-my_1, my_1]$ i svaki takav pravougaonik preslikava na $R_2^m = [-mx_2, mx_2] \times [-my_2, my_2]$. Ponavljanjem se dobija produženje F, koje je jednolisno ako je f jednolisno. Odavde se izvodi zaključak da je $F(z) = az + b$.

7. Neka je funkcija $f : \{z : \mathrm{Im}\; z > 0\} \cup (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ analitička u gornjoj poluravni i neprekidna u $\{z : \mathrm{Im}\; z > 0\} \cup (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, gdje je $-\infty < a \leq b < +\infty$. Dokazati da ako funkcija

f uzima realne vrijednosti na $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, onda se ona može analitički produžiti na $\mathbb{C}$ sa rezom po duži $[a, b]$.

5 O primjenama teorije konformnih preslikavanja

Razmotrimo kratko Dirichletov zadatak u ravni: naći funkciju $u = u(x, y)$ takvu da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x, y) \in D, \ u|_\Gamma = g.$$

Pri tome se pretpostavlja da je Γ granica oblasti D i da je $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ zadata neprekidna funkcija. Dokazuje se da u prosto povezanoj oblasti, ograničenoj konturom Γ, zadatak ima tačno jedno rješenje.[17]

Pokazaćemo kako se formule i tvrđenja koja se odnose na konformna preslikavanja mogu iskoristiti za rješavanje postavljenog zadatka. Prije svega važi sljedeće tvrđenje, koje se dokazuje neposrednom provjerom.

Teorema 5.1. *Ako je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ harmonijska u oblasti D i ako funkcija $g : D' \to D$ konformno i bijektivno slika D' na D, onda je funkcija $h = f \circ g$ harmonijska na D'.*

5.1 Dirichletov problem u krugu i Poissonov integral po jediničnoj kružnici

Ponovo ćemo riješiti Dirichletov zadatak za krug (vidjeti primjer 4.9). Dakle, odredićemo vrijednosti harmonijske funkcije $u : D \to \mathbb{R}$ u tačkama jediničnog kruga D u funkciji graničnih vrijednosti funkcije $u|_{\partial D} = u_0$. Rješenje možemo naći koristeći Cauchyevu integralnu formulu. Naime, ako je $f : D \to \mathbb{C}$ analitička funkcija čiji je realni dio funkcija u, onda je

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=1} \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta.$$

[17] *Harmonijska funkcija koja zadovoljava gornje uslove je funkcija na kojoj se dostiže minimum sljedećeg funkcionala: $\mathcal{F} \ni f \mapsto D(f) = \iint_D (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 dxdy$, gdje je $\mathcal{F}$ skup svih diferencijabilnih funkcija definisanih na oblasti D koje zadovoljavaju granični uslov $f|_\Gamma = u_0$. Pri tome, ako se pretpostavi da je kodomen funkcije f trodimenzionalni prostor, onda je tačka minimuma Dirichletovog integrala minimalna površ sa granicom Γ.*